

## PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS (INF 2926)

### 2ª Lista de Exercícios

1. Considere o problema de determinar o Fluxo Máximo de um vértice  $s$  a um vértice  $t$  em um grafo orientado  $G = (V, E)$  onde os arcos  $e \in E$  têm capacidade igual  $c_e$ . Lembre que uma rede residual associada a um fluxo  $f = (f_e, e \in E)$  possui para cada arco  $e = (u, v)$  um arco  $(u, v)$  com capacidade  $c_e - f_e$  se  $c_e - f_e > 0$  e um arco  $(v, u)$  com capacidade  $f_e$  se  $f_e > 0$ . Considere agora o algoritmo para encontrar o fluxo máximo de  $s$  para  $t$  em um grafo, abaixo:

**Algoritmo FluxoMáximo** ( $s$  - fonte,  $t$  - sumidouro)

Passo 0: *Inicialização*

Seja  $f = (f_1, \dots, f_m)$  o fluxo corrente nos arcos de  $E$ ,  $|E| = m$ . Seja  $R(f)$  a rede residual do grafo  $G = (V, E)$  dado o fluxo corrente  $f$ .

$f \leftarrow (0, \dots, 0)$

Passo 1: *Iteração*

Enquanto existe caminho de  $s$  a  $t$  em  $R(f)$  faça

- 1.1 Encontre o caminho mais curto (em número de arcos) de  $s$  a  $t$  em  $R(f)$ . Seja  $p_1, \dots, p_k$  esse caminho (que tem  $k$  arcos).
- 1.2 Seja  $q = \min_{e=p_1, \dots, p_k} r(e)$  onde  $r(e)$  é a capacidade do arco  $e$  na rede residual  $R(f)$ .
- 1.3 Atualização de  $f$   $R(f)$ : Para  $e = p_1, \dots, p_k$  faça  $f_e \leftarrow f_e + q$ ; Atualize  $R(f)$ .

- (a) Seja o grafo  $G = (V, E)$  onde  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $E = \{(1, 2, 3), (1, 3, 3), (1, 4, 2), (2, 5, 4), (3, 4, 1), (3, 6, 2), (4, 2, 1), (4, 6, 2), (5, 4, 1), (5, 6, 1)\}$ , onde os trios  $(u, v, c)$  indicam os vértices de partida e de chegada e a capacidade do arco. Deseja-se encontrar o fluxo máximo de 1 para 6.
  - (b) Considere que todos os arcos do grafo  $G$  possuem capacidade unitária ( $c_e = 1$ , para todo  $e \in E$ ). Sabendo que o fluxo máximo não pode, neste caso, exceder  $m$ , mostre que a complexidade do algoritmo *FluxoMáximo* é  $O(m^2)$ .
2. Considere um mapa rodoviário e um motorista que tem que ir do vértice  $s$  ao  $t$ . O mapa é representado pelo grafo  $G = (V, E)$ , não-orientado onde os valores associados às arestas  $e \in E$ ,  $h_e$ , correspondem às altitudes das estradas correspondentes aos trechos. O motorista não gosta de altitude e quer fazer o caminho que minimiza a maior altitude que ele vai passar. Proponha um algoritmo que encontre esse caminho (Dica: utilize um algoritmo de árvore geradora mínima). Qual a complexidade do seu algoritmo? Tem que ser  $O(n^2)$ .

3. Uma floresta é um grafo sem ciclos. Seja um grafo  $G = (V, E)$ , não-orientado onde os pesos das arestas  $e \in E$  são dados por  $w_e$ . Proponha um algoritmo para encontrar uma floresta com  $k$  arestas,  $K \leq n - 1$ , de peso total mínimo. Sua complexidade tem que ser  $O(n^2)$  ou inferior. Qual seria a complexidade utilizando o algoritmo de Kruskal? Projete um algoritmo de complexidade  $O(Km \log K)$  para esse problema.
4. Uma 1-árvore geradora mínima pode ser obtida adicionando-se à árvore geradora mínima a menor aresta que não pertence à mesma. Suponha agora que essa aresta adicional precise estar conectada a um dado vértice  $v$ , isto é o único ciclo da 1 árvore deve conter o vértice  $v$  e após a remoção de uma aresta ligada ao vértice  $v$  deve restar uma árvore. Proponha um algoritmo para encontrar uma 1-árvore geradora mínima com esta restrição.
5. Considere que a árvore geradora de peso mínimo (AGM) de  $G = (V, E)$ , não-orientado onde os pesos das arestas  $e \in E$  são dados por  $w_e$ , é conhecida. Considere agora que um novo vértice foi acrescentado à  $G$  com arestas para todos os vértices em  $V$ . Proponha um algoritmo para encontrar a nova AGM. Seu algoritmo deve executar em  $O(n \log n)$  ou menos. Tente encontrar um algoritmo  $O(n)$ , existe.
6. Seja o grafo  $G = (V, E)$  onde  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $E = \{(1, 2, 5), (1, 3, 2), (1, 4, 2), (2, 5, 2), (3, 4, 1), (3, 6, 6), (4, 2, 1), (4, 6, 7), (5, 4, 1), (5, 6, 3)\}$ , onde os trios  $(u, v, l)$  indicam os vértice de partida, de chegada e a distância do arco.
  - (a) Aplique o algoritmo de Ford-Bellman ("Correção de Rótulos") para encontrar os c.m.c.'s do vértice 1 aos demais.
  - (b) Aplique o algoritmo de Dijkstra para encontrar os c.m.c.'s do vértice 1 aos demais.
  - (c) Suponha agora que os arcos não tem orientação, ou seja se existe o arco  $(u, v, l)$ , também existe o arco  $(v, u, l)$ , e aplique o algoritmo de Kruskal para encontrar a Árvore Geradora Mínima de  $G$ .
  - (d) Ainda supondo que os arcos não tem orientação, aplique o algoritmo de Prim para encontrar a Árvore Geradora Mínima de  $G$ .
  - (e) Ainda supondo que os arcos não tem orientação, aplique o algoritmo de Floyd-Warshall para encontrar os c.m.c.'s entre todos os pares de vértices.
7. Considere o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mais curto entre um vértice *fonte* e os demais vértices de um grafo orientado  $G = (V, E)$  onde a distância associada a um arco  $e \in E$  é dada por  $l_e = l_{vw}$  onde  $v$  e  $w$  são o vértice de partida e de chegada do arco  $e$ , respectivamente. (As complexidades devem ser obtidas em função de  $n = |V|$  e  $m = |E|$ ).

**Algoritmo Dijkstra** ( $s$  - fonte)

Passo 0: *Inicialização*

Seja  $S$  o conjunto de vértices com caminho mais curto a partir de  $s$  determinado, e  $\bar{S}$  seu complemento ( $\bar{S} = V - S$ ).

$S \leftarrow \emptyset$

$d(i) \leftarrow +\infty \forall i \in V$ ;

$d(s) \leftarrow 0$ ;  $pred(s) \leftarrow 0$ ;

Passo 1: *Iteração*

Enquanto  $S \subset V$  faça

- 1.1 Encontre  $v \in \bar{S}$  t.q.  $d(v) = \min_{w \in \bar{S}} d(w)$
- 1.2  $S \leftarrow S \cup \{v\}; \bar{S} \leftarrow \bar{S} \setminus \{v\};$
- 1.3 Para todo  $w \in \Gamma^+(v)$   
 Se  $d(v) + l_{vw} < d(w)$   
 então  $d(w) \leftarrow d(v) + l_{vw}; pred(w) \leftarrow v;$

Responda aos itens abaixo:

- (a) Considere que o passo **1.1** é realizado através do uso de um vetor que armazena os valores  $d(i), i = 1, \dots, n$ . Qual a complexidade desta implementação do algoritmo de Dijkstra ?
  - (b) Qual a complexidade global do passo **1.1** ? E do item **1.3** ?
  - (c) A implementação que utiliza uma d-Heap para armazenar  $d(i)$  faz uso das operações *remove – topo(H)* no passo **1.1** e *reduz – chave(H, posicao(v), novo – valor)* no passo **1.3**. Reescreva estes passos utilizando estas operações e analise a complexidade global do algoritmo.
  - (d) Considere agora que todas as distâncias  $l_{vw}$  são inteiros e que  $C = \max_{(v,w) \in E} l_{vw}$  (qual a maior distância possível em um caminho ?). Observe que a distância  $d(v)$  do vértice selecionado no passo **1.1** a cada iteração é maior ou igual à do vértice selecionado na iteração anterior. Considere que *buckets* (ou caixas) são criadas para os valores de 0 a  $nC$ . Cada *bucket* utiliza uma lista duplamente encadeada para armazenar os vértices  $v$  tais que  $d(v)$  tem o valor correspondente ao *bucket*. Um vetor ( $d$ ) é utilizado para indicar em que *bucket* está armazenado.
    - i. Escreva os passos **1.1** e **1.3** utilizando a estrutura descrita acima.
    - ii. Analise a complexidade deste algoritmo. Qual seria a complexidade deste algoritmo quando as distâncias são dadas pelo número de arestas no caminho ?
8. Considere o problema de encontrar o caminho-mais-curto entre todos os pares de vértices onde os arcos do grafo orientado  $G = (V, E)$  podem assumir valores negativos.
- (a) Proponha um algoritmo para determinar se o grafo possui ciclo negativo. Analise sua complexidade.
  - (b) Proponha um algoritmo que, nos casos em que um ou mais ciclos negativos estão presentes em  $G$ , indique os pares de vértices que possuem caminhos-mais-curtos entre eles em  $G$ , ou seja cmc's que não passam pelos ciclos negativos.
9. (C,L & R, 1990, ex. cap 24-1 ou C, L, R & S, 2001, ex. cap 23-1 ) “Second best minimum spanning tree”
10. (C,L & R, 1990, ex. cap 25-1 ou C, L, R & S, 2001, ex. cap 24-1 ) “Yen’s improvement to Bellman-Ford”
11. (C,L & R, 1990, ex. cap 25-3 ou C, L, R & S, 2001, ex. cap 24-3 ) “Arbitrage”
12. Prove que é verdade ou que é falso (nesse caso apresentando um contra-exemplo).
- (a) Se todas as distâncias dos arcos são diferentes, então a árvore de c.m.c. (de  $s$  aos outros vértices do grafo) é **única**.

- (b) Considere a distância dos c.m.c. de  $s$  aos outros vértices do grafo. Se a distância de cada arco é aumentada de  $k$  unidades (ou seja  $l'_{uv} \leftarrow l_{uv} + k$  para todo arco  $e = (u, v) \in E$ ), as distâncias dos c.m.c. aumentam de um múltiplo de  $k$ .
- (c) Se forem retiradas as orientações dos arcos de um grafo orientado  $G$  (i.e. passa ser possível passar nos dois sentidos), as distâncias dos c.m.c.'s permanecem as mesmas.
- (d) Entre todos os c.m.c.'s existentes entre dois vértices em um grafo, o algoritmo de Dijkstra sempre acha o c.m.c. que possui o menor número de arestas.
13. Considere o c.m.c. entre um par de vértices em um grafo orientado  $G = (V, E)$ ,  $s$  e  $t$  por exemplo. Um arco vital com respeito a esse c.m.c. é um arco que, se retirado do grafo, a distância do c.m.c. de  $s$  a  $t$  aumenta. O arco mais vital é aquele cuja retirada causa o maior aumento.
- Proponha um algoritmo para encontrar o arco mais vital dados  $G = (V, E)$ ,  $s$  e  $t$ .
  - Analise a complexidade do seu algoritmo.
14. Seja  $G = (V, E)$  um grafo orientado e acíclico, com distâncias  $l_e$  para  $e \in E$ , e  $s$  um vértice a partir do qual existe caminho para todos os demais vértices do grafo. Proponha um algoritmo com complexidade  $O(m)$ ,  $m = |E|$ , para encontrar os c.m.c.'s de  $s$  aos outros vértices do grafo. (Dica: use ordenação topológica.)
15. Suponha que foram obtidos os c.m.c.'s de  $s$  aos outros vértices de  $G$  e a árvore de c.m.c. é conhecida. Suponha agora que as distâncias de todos os arcos deve ser aumentada de  $k$  unidades (ou seja  $l'_{uv} \leftarrow l_{uv} + k$  para todo arco  $e = (u, v) \in E$ ). Proponha um algoritmo  $O(m)$  para obter os novos c.m.c.'s.