PUC-Rio
Departamento de Informática
Prof. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão (3WA) Lorenza Moreno e David Sotelo (3WB)
Horário: 2as. e 4as. 15-17hs (3WA), 3as. e 5as. 19-21 (3WB)
25 de maio de 2010
Período: 2010.1

ANÁLISE DE ALGORITMOS (INF 1721)

2^a Lista de Exercícios

1. Exercícios Livro *Algorithms*, Dasgupta, Papadimitriou e Vazirani.
   - Cap. 3: 3.7, 3.11, 3.18, 3.19, 3.25, 3.26, 3.27, 3.31;
   - Cap. 4: 4.1, 4.3, 4.4, 4.8, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.18.
2. Seja o algoritmo de Dijkstra abaixo.
   - Analise sua complexidade explicando as estruturas de dados utilizadas para que a complexidade seja $O(n^2)$.
   - Analise sua complexidade explicando as estruturas de dados utilizadas para que a complexidade seja $O(m \quad log \quad n)$.
   - Explique que alterações devem ser feitas para que este algoritmo encontre uma árvore geradora mínima de G (algoritmo de Prim).

   Algoritmo Dijkstra (s - *fonte*)

Passo 0: *Inicialização*
Seja S o conjunto de vértices com o caminho mais curto a partir de s já determinado, e $\overline{S}$ seu complemento ($\overline{S} = V - S$).
$S \leftarrow \emptyset$
$d(i) \leftarrow +\infty \; \forall \, i \in V$;
$d(s) \leftarrow 0$; $pred(s) \leftarrow 0$;

Passo 1: *Iteração*
Enquanto $S \subset V$ faça
1.1 Encontre $v \in \overline{S}$ t.q. $d(v) = \min_{w \in \overline{S}} d(w)$
1.2 $S \leftarrow S \bigcup \{v\}$; $\overline{S} \leftarrow \overline{S} \setminus \{v\}$;
1.3 Para todo $w \in \Gamma^+(v)$
Se $d(v) + l_{vw} < d(w)$
então $d(w) \leftarrow d(v) + l_{vw}$; $pred(w) \leftarrow v$;

3. Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado e acíclico, com distâncias l_e para $e \in E$, e s um vértice a partir do qual existe caminho para todos os demais vértices do grafo. Proponha um algoritmo com complexidade $O(m)$, $m = |E|$, para encontrar os c.m.c.'s de s aos outros vértices do grafo. (Dica: use ordenação topológica.)

4. Considere o Algoritmo de Dijkstra para encontrar o Caminho-mais-curto (c.m.c.) entre o vértice s e os outros vértices de um grafo $G = (V, E)$, orientado onde as distâncias dos arcos $e \in E$ é dada por w_e.

   - Construa um grafo com alguns arcos e com $w_e < 0$, mas sem ciclos de comprimento negativo, onde o algoritmo de Dijkstra funciona **corretamente**.
   - Construa um grafo com alguns arcos e com $w_e < 0$, mas sem ciclos de comprimento negativo, onde o algoritmo de Dijkstra **falha** em encontrar o c.m.c de s aos outros vértices.

5. Prove que é verdade ou que é falso (nesse caso apresentando um contra-exemplo).

   - Se todas as distâncias dos arcos são diferentes, então a árvore de c.m.c. (de s aos outros vértices do grafo) é **única**.
   - Considere a distância dos c.m.c. de s aos outros vértices do grafo. Se a distância de cada arco é aumentada de k unidades, a distâncias dos c.m.c. aumentam de um múltiplo de k.
   - Se forem retiradas a orientações dos arcos de um grafo orientado G (i.e. passa ser possível passar nos dois sentidos), as distâncias dos c.m.c.'s permanecem as mesmas.
   - Entre todos os c.m.c.'s existentes entre dois vértices em um grafo, o algoritmo de Dijkstra sempre acha o c.m.c. que possui o menor número de arestas.

6. Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado e acíclico, e s um vértice a partir do qual existe caminho para todos os demais vértices do grafo. Proponha um algoritmo com complexidade $O(m)$, $m = |E|$, para encontrar os c.m.c.'s de s aos outros vértices do grafo. Para isso, percorra os vértices seguindo uma ordenação topológica.

   - Uma ordenação topológica em um grafo orientado acíclido $G = (V, E)$ é uma ordenação dos vértices do grafo onde se um vértice v vem antes de um vértice w então não existe caminho de w para v.
   - Para se obter uma ordenação topológica observe que um grafo acíclico tem sempre pelo menos um vértice com grau de entrada igual a ZERO. (Por que ?) Portanto é possível se obter uma ordenação topológica retirando sucessivamente vértices de grau zero, que aparecem na ordenação antes dos que permanecem no grafo.

   O seu algoritmo deve encontrar uma ordenação topológica e o c.m.c de s aos demais vértices do grafo em $O(m)$. Explique com detalhes este algoritmo.

7. Suponha que foram obtidos os c.m.c.'s de s aos outros vértices de G e a árvore de c.m.c. é conhecida. Suponha agora que as distâncias de todos os arcos deve ser aumentada de k unidades. Proponha um algoritmo $O(m)$ para obter os novos c.m.c.'s.

8. Uma floresta é um grafo sem ciclos. Seja um grafo $G = (V, E)$, não-orientado onde os pesos das arestas $e \in E$ são dados por d_e. Proponha um algoritmo para encontrar uma floresta com k arestas, $k \leq n - 1$, de peso total mínimo. Sua complexidade tem que ser $O(n^2)$ ou inferior.

9. Seja o grafo $G = (V, E)$, não-orientado onde os pesos das arestas $e \in E$ são dados por d_e. Seja também $T(e)$ a árvore geradora mínima que inclui a aresta e. Proponha um algoritmo que encontra as árvores geradoras $T(e)$ para $e \in E$ (i.e. são $m = |E|$ árvores geradoras mínimas) (todas) em $O(n^2)$ ($n = |V|$).

10. Considere que a árvore geradora de peso mínimo (AGM) de $G = (V, E)$, não-orientado onde os pesos das arestas $e \in E$ são dados por d_e, é conhecida. Considere agora que um novo vértice foi acrescentado à G com arestas para todos os vértices em V. Proponha um algoritmo para encontrar a nova AGM. Seu algoritmo deve excutar em $O(n \quad log \quad n)$ ou menos. Tente encontrar um algoritmo $O(n)$, existe.

11. Considere um mapa rodoviário e um motorista que tem que ir do vértice s ao t. O mapa é representado pelo grafo $G = (V, E)$, não-orientado onde os valores associados às arestas $e \in E$, h_e, correspondem às altitudes das estradas correspondentes aos trechos. O motorista não gosta de altitude e quer fazer o caminho que minimiza a maior altitude que ele vai passar. Utilize um algoritmo de árvore geradora mínima para encontrar esse caminho. Qual a complexidade?

12. Considere o problema de Fluxo Máximo do vértice s ao vértice t em um Grafo $G = (V, E)$ com capacidades u_e para todos os arcos $e \in E$.

    (a) Descreva o algoritmo de Ford e Fulkerson e analise a sua complexidade.

    (b) Descreva o algoritmo de Edmonds e Karp. Em que este algoritmo difere do algoritmo de Ford e Fulkerson ?

    (c) Um aresta crítica em um grafo relativa ao problema do Fluxo Máximo é uma aresta que, se sua capacidade for reduzida, o fluxo máximo no grafo também é reduzido. Proponha um algoritmo eficiente para encontrar uma aresta crítica de G.

    (d) Assuma que a capacidade de todos os arcos é unitária. Proponha um algoritmo $O(n.m)$ para o problema do Fluxo Máximo neste grafo. Demonstre que o algoritmos possui esta complexidade.