PUC-Rio
Departamento de Informática
Prof. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
Período: 2008.1
7 de junho de 2008
Horário: 2as-feiras e 4as-feiras de 9 às 11 horas

ANÁLISE DE ALGORITMOS (INF 1721)

3^a Lista de Exercícios

1. Exercícios Livro *Algorithms*, Dasgupta, Papadimitriou e Vazirani.
   - Cap. 5: 5.13, 5.14, 5.15;
   - Cap. 6: 6.2, 6.3, 6.4, 6.13, 6.17, 6.19.

2. Considere o problema de Fluxo Máximo e os algoritmos *Edmonds-Karp* e *Push-Relabel*. Execute estes algoritmos nas instâncias abaixo:
   (a) Fluxo do vértice s para o vértice t. Conjunto de vértices $V = \{s, 1, 2, \ldots, n, t\}$ e conjunto de arcos $E = \{(s, 1, (n+1) * k), (1, 2, n * k), \ldots, (i, i+1, (n-i+1) * k), \ldots, (n-1, n, 2 * k), (n, t, k)\}$ onde (i, j, c) no conjunto corresponde ao arco (i, j) com capacidade c; Resolva para $n = 2$ e $n = 3$. Qual a complexidade desses algoritmos para este tipo de grafo em função de n ? Mostre que não depende de k.
   (b) Fluxo do vértice s para o vértice t. Conjunto de vértices $V = \{s, 1, 2, \ldots, n, t\}$ e conjunto de arcos $E = \{(s, 1, k), (s, 2, k), \ldots, (s, i, k), \ldots, (s, n, k),\ (1, t, k),\ (2, t, k),\ \ldots, (i, t, k), \ldots, (n, t, k)\}$ onde (i, j, c) no conjunto corresponde ao arco (i, j) com capacidade c; Resolva para $n = 2$ e $n = 3$. Qual a complexidade desses algoritmos para este tipo de grafo em função de n ? Mostre que não depende de k.

3. Considere a multiplicação de n matrizes $A_1, \ldots, A_n$. Considere também que denota-se o produto das matrizes $A_k.A_{k+1}.\ldots.A_q$ por $A_{k..q}$ e que as dimensões das matrizes são dadas por $d_k \times d_{k+1}$ para a matriz A_k. Assim, $A_{1..n}$ terá dimensão $d_1 \times d_{n+1}$.

   Aqui a multiplicação de pares consecutivos de matrizes $A_k.A_{k+1}$ é feita calculando

   $$a_{i,j}^{k..k+1} = \sum_{p=1}^{d_{k+1}} a_{i,p}^{k}.a_{p,j}^{k+1}$$

   para todo par (i, j) que é elemento de $A_k.A_{k+1}$ e onde $a_{i,j}^k$ representa o elemento (i, j) da matriz A_k.

   Observe que a multiplicação de 3 matrizes A_1, A_2 e A_3, pode ser feita de duas manieras: $((A_1.A_2).A_3)$ e $(A_1.(A_2.A_3))$. (De quantas maneiras pode-se obter o produto de n matrizes ?)

   Observe também que para cada maneira de se multiplicar n matrizes pode-se ter que realizar um número diferente de multiplicações. Quantas são ?

Apresente um algoritmo para determinar a maneira de se multiplicar as n matrizes que utiliza o menor número de multiplicações. Analise a complexidade do algoritmo proposto. A complexidade é polinomial ? Qual a complexidade menor possível que um algoritmo que resolve este problema pode ter ?

4. Um comerciante possui um armazém que utiliza para suprir seus clientes de um único produto. O seu armazém pode guardar até C unidades do produto. Para as próximas T semanas o comerciante TEM que atender às demandas dos seus clientes que somam d_t para a semana t, onde $t = 1, 2, \ldots, T$. Além disso, ele possui $s_0 (\leq C)$ unidades em estoque antes do início da primeira semana, e já negociou com os fornecedores os preços unitários p_t $(t = 1, 2, \ldots, T)$. Ele deseja planejar o atendimento dos seus clientes de modo a gastar o mínimo possível com a compra do produto.

   Ajude ao comerciante a definir a sua estratégia ótima de compra do produto nas semanas $t = 1, \ldots, T$.

   (a) Apresente o algoritmo que obtém a estratégia de compra de menor custo e atende às demandas dos seus clientes.

   (b) Analise a complexidade do algoritmo proposto. A complexidade é polinomial ? Qual a complexidade menor possível que um algoritmo que resolve este problema pode ter ?

   (c) Execute o seu algoritmo sobre a seguinte instância: $C = 12$, $T = 5$,$s_0 = 3$, $d_1 = 7$, $d_2 = 4$, $d_3 = 15$, $d_4 = 10$, $d_5 = 7$ e $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$, $p_4 = 6$, $p_5 = 8$. Informe quanto o comerciante deve comprar em cada semana e o seu custo total.