

PUC-Rio
Departamento de Informática
Prof. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
Período: 2006.1
20 de junho de 2006
Horário: 2as-feiras e 4as-feiras de 19 às 21 horas

PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS (INF 1309)

3ª Lista de Exercícios

1. Considere a multiplicação de n matrizes A_1, \dots, A_n . Considere também que denota-se o produto das matrizes $A_k \cdot A_{k+1} \cdot \dots \cdot A_q$ por $A_{k..q}$ e que as dimensões das matrizes são dadas por $d_k \times d_{k+1}$ para a matriz A_k . Assim, $A_{1..n}$ terá dimensão $d_1 \times d_{n+1}$.

Aqui a multiplicação de pares consecutivos de matrizes $A_k \cdot A_{k+1}$ é feita calculando

$$a_{i,j}^{k..k+1} = \sum_{p=1}^{d_{k+1}} a_{i,p}^k \cdot a_{p,j}^{k+1}$$

para todo par (i, j) que é elemento de $A_k \cdot A_{k+1}$ e onde $a_{i,j}^k$ representa o elemento (i, j) da matriz A_k .

Observe que a multiplicação de 3 matrizes A_1, A_2 e A_3 , pode ser feita de duas maneiras: $((A_1 \cdot A_2) \cdot A_3)$ e $(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3))$. (De quantas maneiras pode-se obter o produto de n matrizes ?)

Observe também que para cada maneira de se multiplicar n matrizes pode-se ter que realizar um número diferente de multiplicações. Quantas são ?

Apresente um algoritmo para determinar a maneira de se multiplicar as n matrizes que utiliza o menor número de multiplicações. Analise a complexidade do algoritmo proposto. A complexidade é polinomial ? Qual a complexidade menor possível que um algoritmo que resolve este problema pode ter ?

2. Um comerciante possui um armazém que utiliza para suprir seus clientes de um único produto. O seu armazém pode guardar até C unidades do produto. Para as próximas T semanas o comerciante TEM que atender às demandas dos seus clientes que somam d_t para a semana t , onde $t = 1, 2, \dots, T$. Além disso, ele possui $s_0 (\leq C)$ unidades em estoque antes do início da primeira semana, e já negociou com os fornecedores os preços unitários p_t ($t = 1, 2, \dots, T$). Ele deseja planejar o atendimento dos seus clientes de modo a gastar o mínimo possível com a compra do produto.

Ajude ao comerciante a definir a sua estratégia ótima de compra do produto nas semanas $t = 1, \dots, T$.

- (a) Apresente o algoritmo que obtém a estratégia de compra de menor custo e atende às demandas dos seus clientes.
- (b) Analise a complexidade do algoritmo proposto. A complexidade é polinomial ? Qual a complexidade menor possível que um algoritmo que resolve este problema pode ter ?

- (c) Execute o seu algoritmo sobre a seguinte instância: $C = 12$, $T = 5$, $s_0 = 3$, $d_1 = 7$, $d_2 = 4$, $d_3 = 15$, $d_4 = 10$, $d_5 = 7$ e $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$, $p_4 = 6$, $p_5 = 8$. Informe quanto o comerciante deve comprar em cada semana e o seu custo total.

3. Sejam $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ e $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ duas seqüências de caracteres on $k \leq n$.

- (a) Proponha um algoritmo linear para determinar se P é uma subsequência de T , isto é, se os elementos de P aparecem em T na mesma ordem que em P , mas não necessariamente consecutivos.
- (b) Suponha que a resposta do item anterior é negativa. Proponha um algoritmo para encontrar a maior subsequência de P que está em T .
- (c) Considere que para cada elemento de T é associado um custo positivo c_i , $i = 1, \dots, n$. Proponha um algoritmo para encontrar a subsequência de P que é subsequência de T onde a soma dos custos dos elementos de T é maximizada.
- (d) Analise a complexidade dos algoritmos propostos. Qual a complexidade menor possível de um algoritmo que resolve estes problemas ?