Beyond Worst Case Analysis

Inspirado pela aula homônima do Bootcamp (Tim Roughgarden) e baseado no paper de Fujiwara, H. e Iwama, K. 2002

Por que usar Worst Case Analysis ?

- Aplicação universal (independe do modelo)
    - Gera uma forma quase universal de comparar algoritmos
- Relativamente bem tratável (analiticamente falando)
- “Countless killer applications”

Por que não é sempre bom usar ?

- Nem sempre o problema real é o worst-case
  - QuickSort: $O(n^2)$, mas é um dos mais usados
  - Simplex: funciona bem na prática mas pode ter casos exponenciais
  - Clusterização: NP-hard
    - "Clustering is hard only when it doesn't matter"
- Geralmente muito pessimista
- Pode dar a mesma classificação para algoritmos que, na prática, possuem comportamentos diferentes
  - Paging

Como avançar ?

- Adicionar premissas conhecidas do problema
  - Que tipo de distribuição a entrada pode ter ?
  - Que tipo de solução ótima estamos procurando ?

- Approximation Stability: all near-optimal solutions are “structurally close” to target solution
- Perturbation Stability: optimal solution invariant under perturbations of objective function
- Exact Recovery: characterize the inputs for which a given algorithm (like LP) computes the optimal solution
- Smoothed Analysis

Average-Case Competitive Analysis

- Faz sentido se a distribuição das entradas é conhecida
  - Coloca uma restrição em como o “oponente” joga
- Análise ad-hoc
  - As garantias dependem não só do algoritmo, mas das premissas feitas em cima da entrada
- Não é a mesma coisa que Average Cost
  - No average cost se determina apenas o custo do algoritmo, sem comparar com um “melhor”
  - Pode chegar a soluções diferentes

Exemplo para o Ski Rental

Setup:

- Alugar: *1*
- Comprar: ***s***
- Algoritmo determinístico: compra após ***k*** dias
- Jogo dura ***t*** dias

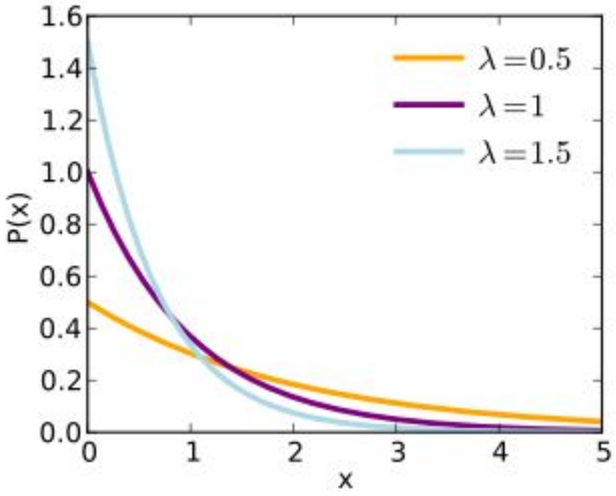
$$\mathrm{ALG}(k,t) = \begin{cases} t & : \quad 0 \le t \le k, \\ k+s & : \quad k < t, \end{cases}$$
$$\mathrm{OPT}(t) = \min(s,t).$$

Premissa sobre entrada

- Assumindo que entrada obedece a distribuição exponencial

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0).$$

Probabilidade de parar
de esquiar em um dado dia



Average-case competitive ratio:

$$\tilde{c}(k) = \boldsymbol{E}\left[\frac{\text{ALG}(k,t)}{\text{OPT}(t)}\right] \cong \int_0^\infty \frac{\text{ALG}(k,t)}{\text{OPT}(t)} \cdot f(t)dt.$$

$$\text{ALG}(k,t) = \begin{cases} t & : \quad 0 \le t \le k, \\ k+s & : \quad k < t, \end{cases}$$
$$\text{OPT}(t) = \min(s,t).$$

Calculando

Caso 1: 0 < k ≤ s

$$\int_0^\infty \frac{ALG(k,t)}{OPT(t)}.f(t)dt$$

$$\int_0^k \frac{ALG(k,t)}{OPT(t)}.f(t)dt + \int_k^s \frac{ALG(k,t)}{OPT(t)}.f(t)dt + \int_s^\infty \frac{ALG(k,t)}{OPT(t)}.f(t)dt$$

$$\int_0^k \frac{t}{t}.f(t)dt + \int_k^s \frac{k+s}{t}.f(t)dt + \int_s^\infty \frac{k+s}{s}.f(t)dt$$

$$\int_0^k f(t)dt + (k+s)\int_k^s \frac{f(t)}{t}dt + \frac{k+s}{s}\int_s^\infty f(t)dt$$

$$-e^{-\lambda t}\Big|_0^k + (k+s)\int_k^s \frac{f(t)}{t}dt + \frac{k+s}{s}.-e^{-\lambda t}\Big|_s^\infty$$

$$1-e^{-\lambda k} + (k+s)\int_k^s \frac{f(t)}{t}dt + \frac{k+s}{s}.e^{-\lambda s}$$

Exponential Integral Ei

$$= 1 - e^{-\lambda k} + \lambda(k+s)\boxed{(Ei(-\lambda s) - Ei(-\lambda k))} + \frac{k+s}{s}e^{-\lambda s}$$

Calma...

$$\mathrm{ALG}(k,t) = \begin{cases} t & : \quad 0 \le t \le k, \\ k+s & : \quad k < t, \end{cases}$$

$$\mathrm{OPT}(t) = \min(s,t).$$

Calculando

Caso 2: k > s

$$\int_0^\infty \frac{ALG(k,t)}{OPT(t)}.f(t)dt$$

$$\int_0^s \frac{ALG(k,t)}{OPT(t)}.f(t)dt + \int_s^k \frac{ALG(k,t)}{OPT(t)}.f(t)dt + \int_k^\infty \frac{ALG(k,t)}{OPT(t)}.f(t)dt$$

$$\int_0^s \frac{t}{t}.f(t)dt + \int_s^k \frac{t}{s}.f(t)dt + \int_k^\infty \frac{k+s}{s}.f(t)dt$$

$$\int_0^s f(t)dt + \frac{1}{s}.\int_s^k t.f(t)dt + \frac{k+s}{s}.\int_k^\infty f(t)dt$$

$$-e^{-\lambda t}\Big|_0^s + -\frac{(\lambda t+1).e^{-\lambda t}}{\lambda s}\Big|_s^k + \frac{k+s}{s}.-e^{-\lambda t}\Big|_s^\infty$$

$$-e^{-\lambda s}+1 + \frac{-(\lambda k+1)e^{-\lambda k}+(\lambda s+1)e^{-\lambda s}}{\lambda s} + -\frac{k+s}{s}.e^{-\lambda s}$$

$$\vdots$$

$$1 + \frac{1}{\lambda s}e^{-\lambda s} - (\frac{1}{\lambda s} - 1)e^{-\lambda k}$$

Tudo vai dar certo...

Entendendo o comportamento do custo

$$\tilde{c}(k) \begin{cases} \tilde{c}_1(k) & 0 < k < s \\ \tilde{c}_2(k) & k > s \end{cases}$$

Derivadas

$$\frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} = -\frac{s}{k}\lambda e^{-\lambda k} + \lambda(Ei(-\lambda s) - Ei(-\lambda k)) + \frac{1}{s}e^{-\lambda s}.$$

$$\frac{d\tilde{c}_2(k)}{dk} = \left(\frac{1}{s} - \lambda\right) e^{-\lambda k}.$$

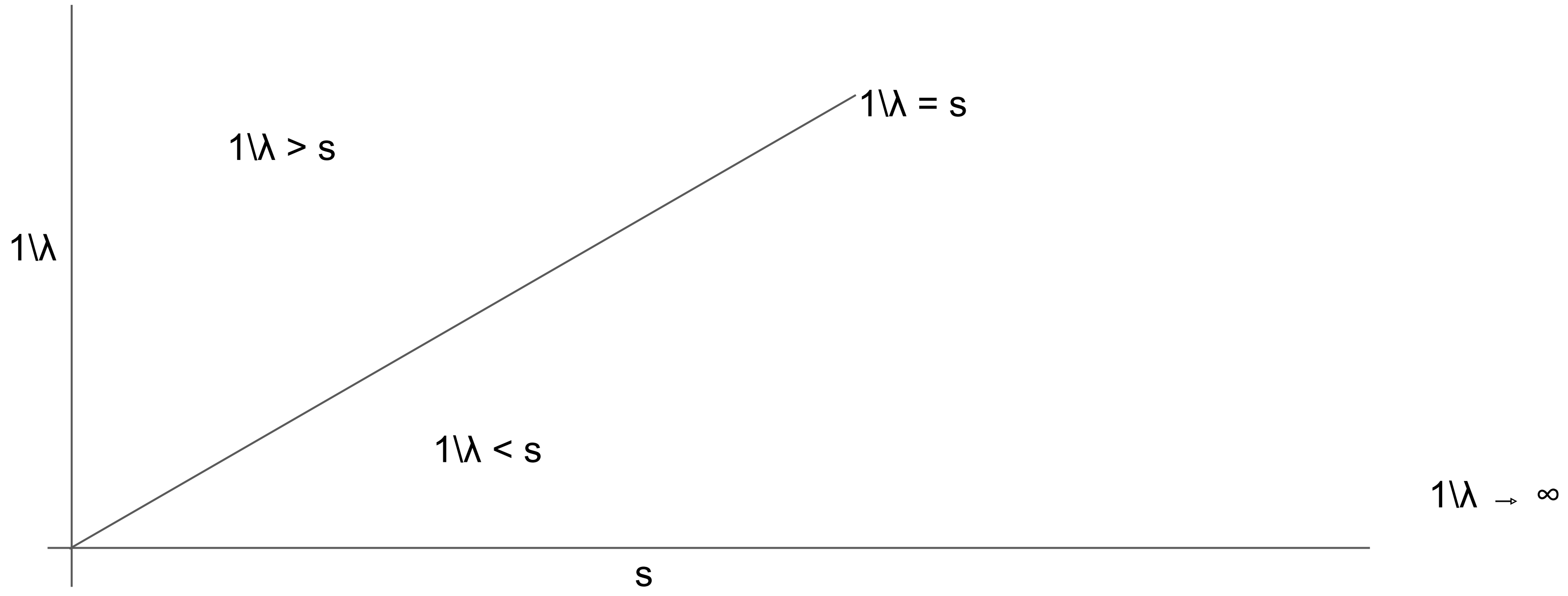
Lembrando: λ é chance de parar
s é o preço de compra
k é tempo total

$$\frac{d^2\tilde{c}_1(k)}{dk^2} = \lambda e^{-\lambda k}\frac{1}{k^2}(\lambda s k + s - k)$$

$$\frac{d^2\tilde{c}_2(k)}{dk^2} = \left(\boxed{\lambda - \frac{1}{s}}\right)\lambda e^{-\lambda k}.$$

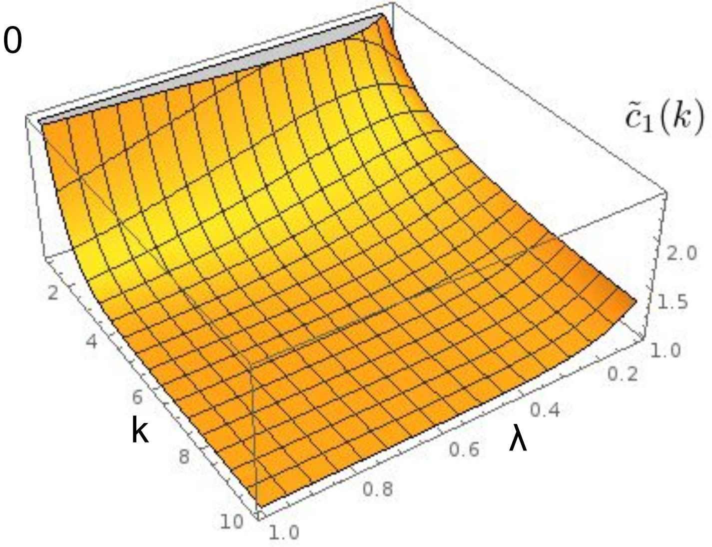
A relação entre **1/λ** e **s** parece ser importante para definir como a função se comporta

Separando em 4 “regiões”



Região 1 $\frac{1}{\lambda} < s$

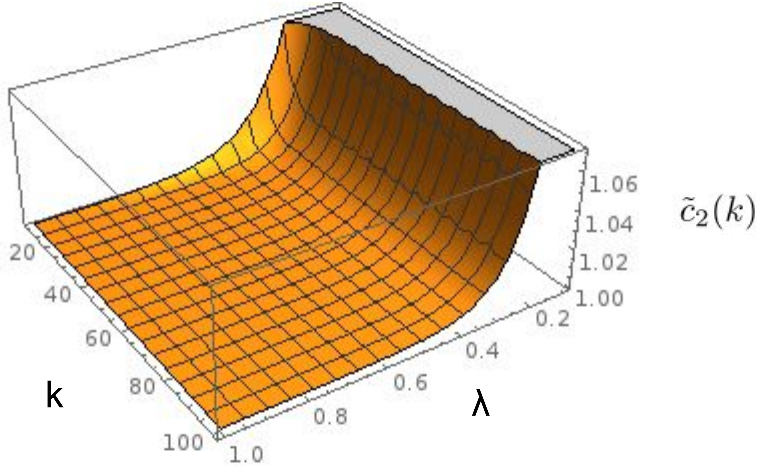
s = 10



- c(k) é sempre decrescente (para s e λ fixos)
- Primeiras derivadas são negativas

$$\frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} = -\frac{s}{k}\lambda e^{-\lambda k} + \lambda(Ei(-\lambda s) - Ei(-\lambda k)) + \frac{1}{s}e^{-\lambda s}.$$

$$\frac{d\tilde{c}_2(k)}{dk} = \left(\frac{1}{s} - \lambda\right) e^{-\lambda k}.$$



> 1

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{c}_2(k) = 1 + \frac{1}{\lambda s} e^{-\lambda s},$$

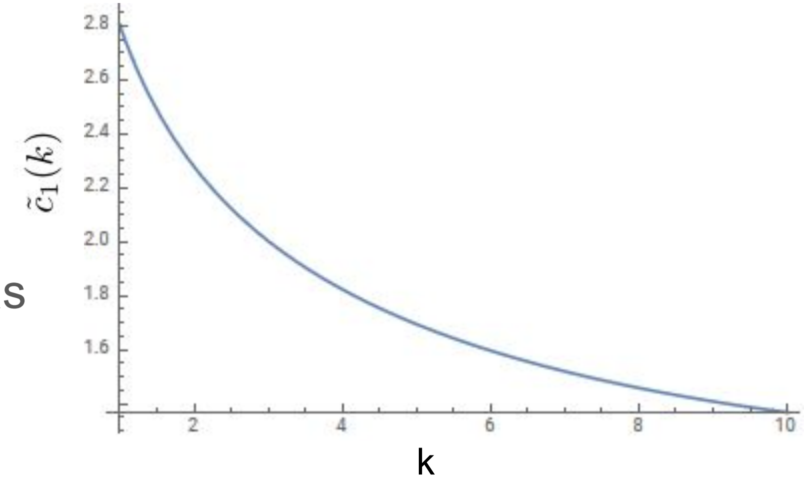
assíntota

Melhor estratégia: aluga sempre (o custo é limitado)

Região 2 $\frac{1}{\lambda} = s$:

- Simetria entre λ e s
- Preço de compra é igual número médio de dias
- c_2 é constante

$$\tilde{c}_2(k) = 1 + \frac{1}{\underbrace{\cancel{\lambda s}}_{1}} e^{-\overbrace{\cancel{\lambda s}}^{1}} - \left(\frac{1}{\underbrace{\cancel{\lambda s}}_{1}} - 1\right) e^{-\lambda k}$$



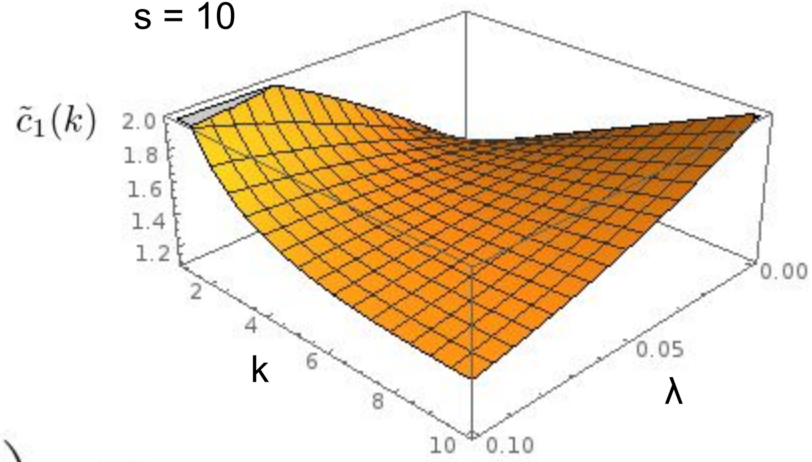
s = 10

Melhor estratégia: compra em qualquer momento depois de **s** dias (pode até não comprar nunca)

Região 3 $\frac{1}{\lambda} > s$:

- Chance de parar é comparável ao custo
- Tem um ponto de mínimo entre 0 e s

s = 10

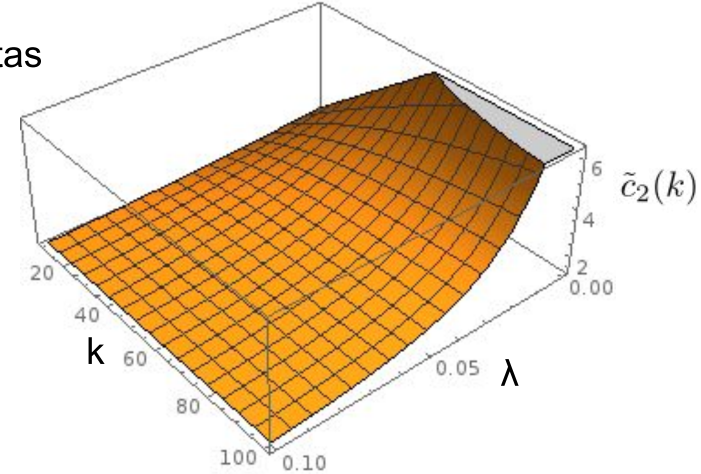


$$\lim_{k \to +0} \frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} = -\infty.$$

$$\lim_{k \to s-0} \frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} = \left(s - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda s} > 0.$$

Não é trivial. Precisa fazer umas substituições espertas

$$\frac{d\tilde{c}_2(k)}{dk} = \underbrace{\left(\frac{1}{s} - \lambda\right)}_{< 0} \underbrace{e^{-\lambda k}}_{> 0}$$



Melhor estratégia: Depende… (vamos olhar melhor mais a frente)

Região 4 $\frac{1}{\lambda} \rightarrow \infty$:

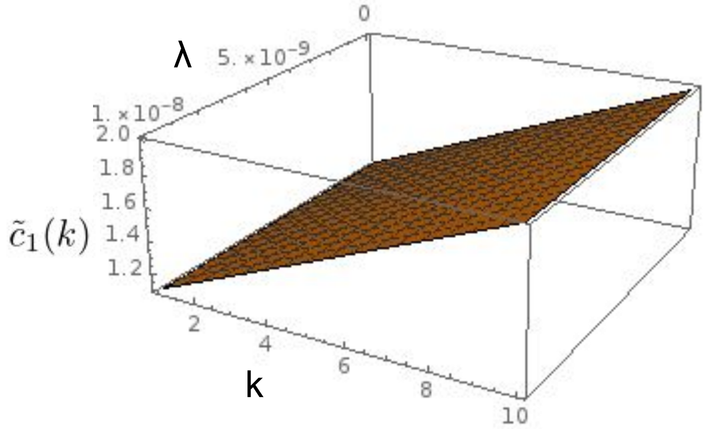
- Nunca pára de esquiar
- Custo degenera em uma função linear

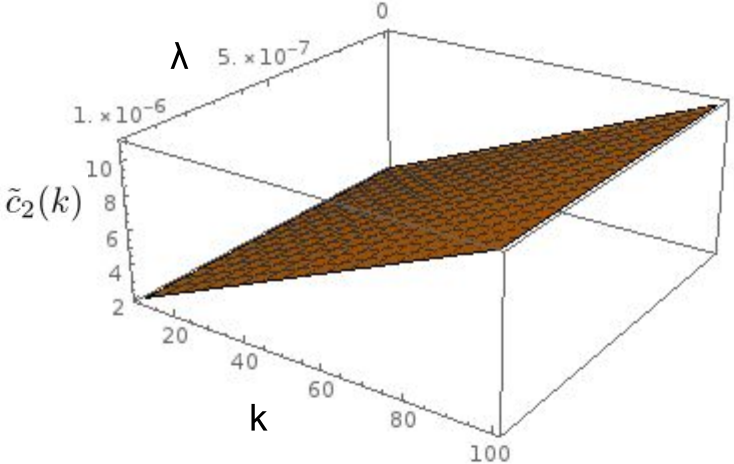
$$\tilde{c}_1(k) = 1 - \underbrace{e^{-\lambda k}}_{1} + \lambda(k+s)\underbrace{(Ei(-\lambda s) - Ei(-\lambda k))}_{0} + \frac{k+s}{s}\underbrace{e^{-\lambda s}}_{1}$$

$$\tilde{c}_2(k) = 1 + \frac{1}{\lambda s}\left(e^{-\lambda s} - e^{-\lambda k}\right) + e^{-\lambda k}$$

Taylor: $\frac{k+s}{s} + \underbrace{\lambda . g(\lambda, k, s)}_{0}$

s = 10





Melhor estratégia: Compra logo no primeiro dia

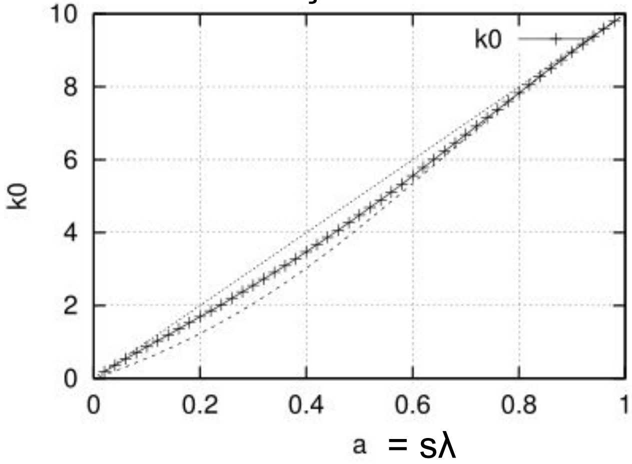
Detalhando Região 3

$$\frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} = -\frac{s}{k}\lambda e^{-\lambda k} + \lambda(Ei(-\lambda s) - Ei(-\lambda k)) + \frac{1}{s}e^{-\lambda s}. = 0$$

- Onde é o ponto de mínimo k_0 ? ¯_(ツ)_/¯
  - Solução numérica

- Será necessário definir bounds para o valor k_0

Simulação Numérica



Upper Bound para k_0

- Se o ponto de mínimo está entre 0 e s, um upper bound é:
- $s \leq k_0 \rightarrow s \leq t \leq k_0 \rightarrow \frac{1}{t} \geq \frac{1}{s}$

Estamos no Caso 1 ($0 < k \leq s$), mas calculando upper bound, então:

$$\frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} = -\frac{s}{k}\lambda e^{-\lambda k} + \int_k^s \frac{1}{t}\lambda e^{-\lambda t}dt + \frac{1}{s}e^{-\lambda s}$$

$$> -\frac{s}{k}\lambda e^{-\lambda k} + \underbrace{\int_k^s \frac{1}{s}\lambda e^{-\lambda t}dt}_{\text{Integral simples}} + \frac{1}{s}e^{-\lambda s}$$

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{\lambda s}{k}\right)e^{-\lambda k}$$

0 em $k = s^2\lambda = sa$ $\quad a = s\lambda$

$$-\infty < \frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} < 0$$

$$\lim_{k \to +0}$$

$k = sa$

$$\boxed{k_0 < sa}$$

Lower Bound para k_0

$$\frac{1}{t} \leq -\frac{1}{sk}(t-s) + \frac{1}{s} \quad (k \leq t \leq s)$$

$$\frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} = -\frac{s}{k}\lambda e^{-\lambda k} + \int_k^s \frac{1}{t}\lambda e^{-\lambda t}dt + \frac{1}{s}e^{-\lambda s}$$

k < s → $e^{-k} > e^{-s}$

$$\frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} < \left(\frac{1}{s} - \frac{\lambda s}{k}\right)e^{-\lambda k} + \frac{1}{sk}\int_k^s (s-t)\lambda e^{-\lambda t}dt.$$

$e^{-\lambda t} < e^{-\lambda k}$

$$\frac{d\tilde{c}_1(k)}{dk} < \frac{\lambda}{2sk}e^{-\lambda k}\left\{k^2 - 2\left(s - \frac{1}{\lambda}\right)k - s^2\right\}$$

0 em $k = s - \frac{1}{\lambda} + \sqrt{\left(s - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + s^2}.$

$$s\left\{1 - \frac{1}{a} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + 1}\right\} < k_0$$

Diferença entre bounds

$$g(a) = sa - s\left\{1 - \frac{1}{a} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + 1}\right\}$$

$\dfrac{dg(a)}{da} =$  $= 0$

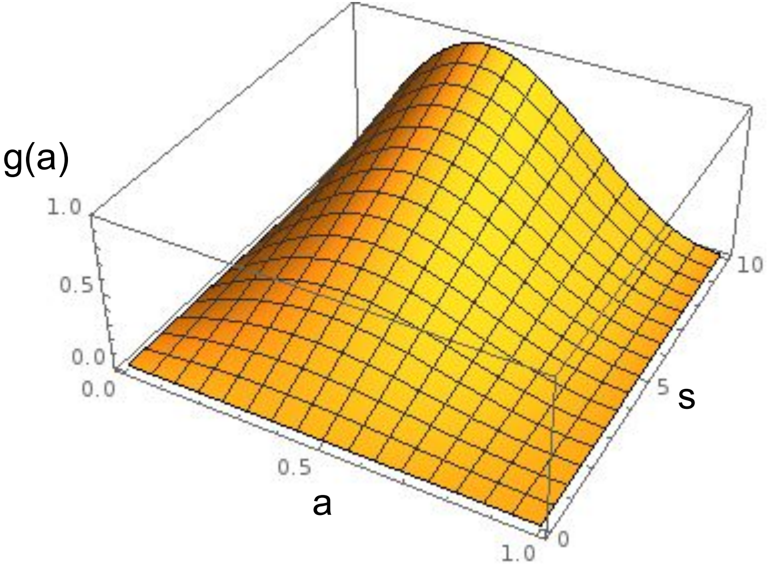
$a = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\right)$

$\boxed{a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)} \longrightarrow \approx 0.366$

$a = 1$

$a < \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\right), \quad s = 0$

$\frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\right) < a < 0, \quad s = 0$



$$\boxed{g(0.366) < 0.099s}$$

Juntando tudo

- Se $\frac{1}{\lambda} \to \infty$:
  - Compra no primeiro dia
- Se $\frac{1}{\lambda} \leq s$
  - Aluga todos os dias
- Senão:
  - Aluga por k_0 dias e depois compra

$$s^2\lambda - \frac{s}{10} < k_0 < s^2\lambda$$

Conclusão

- A melhor solução depende da entrada
- Nenhuma das estratégias ótimas é a estratégia do Worst-Case
- Outras distribuições de entrada podem gerar outras soluções

Referências

1. Hiroshi Fujiwara and Kazuo Iwama. Average-case competitive analyses for ski-rental problems. In Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics) , 2002.
2. Tim Roughgarden. Beyond Worst-Case Analysis I — Simons Institute for the Theory of Computing, 2016.
3. Tim Roughgarden. Beyond Worst-Case Analysis II — Simons Institute for the Theory of Computing, 2016.