

Lista de Exercícios 2

Pergunta 1. Dado um grafo conexo e não direcionado $G = (V, E)$, explique como seria um algoritmo para decidir se existe ou não uma aresta em E tal que a sua remoção não desconecta o grafo. Analise a complexidade do algoritmo proposto. Quanto mais eficiente a solução, melhor.

Pergunta 2. Em um grafo bipartido completo, todos os vértices de uma partição são ligados a todos os vértices da outra. Qual é a altura da árvore gerada por uma BFS em um grafo bipartido completo? Qual é a altura da árvore gerada por uma DFS em um grafo bipartido completo?

Pergunta 3. Seja G um grafo direcionado com pesos positivos nas arestas, seja s um vértice de G e seja k um inteiro positivo. Como podemos encontrar os k vértices mais próximos de s ? Com qual complexidade? Analise em função de k, m, n (n = número de nós, m = número de arestas).

Pergunta 4. Um site de música na Internet decidiu criar um ranking com as melhores canções da última década, a partir de n canções, s_1, \dots, s_n , pré-selecionadas. Durante um mês, sempre que um usuário acessava o site, duas canções escolhidas aleatoriamente eram exibidas, e o usuário devia marcar qual das duas ele preferia. Ao término deste processo, temos um conjunto de triplas $S = \{(s_i, s_j, d_{ij}) | 1 \leq i < j \leq n\}$, aonde $d_{ij} = i$ se a maioria das pessoas prefere s_i à s_j , $d_{ij} = j$ se a maioria das pessoas prefere s_j à s_i e $d_{ij} = 0$ se não há uma preferência entre as canções. Um ranking R é consistente com a lista S se e somente se para todo par de canções s_i e s_j a seguinte condição é válida: se s_i vem antes da canção s_j no ranking R , então a maioria das pessoas prefere s_i à s_j ou não há uma preferência entre tais canções.

- a) Descreva um algoritmo eficiente para verificar se é possível criar um ranking de canções consistente com a pesquisa. Note que o algoritmo deve responder SIM ou NÃO. Analise a complexidade de pior caso do algoritmo proposto em função de n . Explique as estruturas de dados utilizadas para obter tal complexidade.
- b) Em algumas situações é possível existir mais de um ranking consistente com S . Dado dois rankings R e R' para uma lista S , dizemos que R domina R' se e somente se na primeira posição que R difere de R' o índice da canção de R é menor que o índice da canção de R' . Por exemplo, se $R = s_1 s_3 s_2 s_4$ e $R' = s_1 s_3 s_4 s_2$, então R domina R' já que os rankings diferem pela primeira vez na terceira posição e s_2 tem índice menor que s_4 . Descreva como seria um algoritmo para determinar um ranking consistente com a lista S que não é dominado por nenhum outro ranking consistente com S . Analise a complexidade do algoritmo proposto em função de n . Explique as estruturas de dados utilizadas para obter tal complexidade.

Pergunta 5. The police department in the city of Computopia has made all streets one-way. The mayor contends that there is still a way to drive legally from any intersection in the city to any other intersection, but the opposition is not convinced. A computer program is needed to determine whether the mayor is right. However, the city elections are coming up soon, and there is just enough time to run a *linear-time* algorithm.

- a) Formulate this problem graph-theoretically, and explain why it can indeed be solved in linear time.

Pergunta 6. Seja um grafo não direcionado $G = (V, E)$. Uma cobertura para G é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que toda aresta de E tem pelo menos uma extremidade em C . Considere o seguinte algoritmo guloso.

```

procedure GULOSO( $V, E$ )
   $C \leftarrow \emptyset$ 
   $G' \leftarrow G$ 
  while  $G'$  possuir arestas do
     $v \leftarrow$  vértice de  $G'$  com maior grau
     $C \leftarrow C \cup v$ 
     $G' \leftarrow G' - v$ 
  end while
  return  $C$ 
end procedure

```

Diga como implementar esse algoritmo de forma eficiente (ou seja, diga as estruturas de dados utilizadas, etc.) e analise sua complexidade.

Pergunta 7. Considere o seguinte problema clássico de travessia da raposa, galinha e saco de feijão: Um fazendeiro tem uma raposa, uma galinha e um saco de feijão que ele quer atravessar de um lado para o outro do rio. Seu barco só comporta o fazendeiro de mais um item. A raposa não pode ficar sozinha com a galinha em momento nenhum, e a galinha também não pode ficar sozinha com o saco de feijão.

Modele esse problema utilizando um grafo e dê um algoritmo que encontra uma sequência de movimentos que permite transportar as posses do fazendeiro de um lado para o outro do rio.

Pergunta 8. Considere um grafo direcionado acíclico onde cada aresta e tem um tamanho w_e . Dado dois vértices u, v no grafo, compute o caminho **mais longo** entre eles em tempo $O(n + m)$.

EXERCÍCIOS DO LIVRO

- Capítulo 3 Kleinberg-Tardos, exercícios: 1, 2, 4, 6, 8, 10 12.