

Grafos

Caminhos, ciclos, e árvores

Definição (Passeio)

Um **passeio** (*walk*) em um grafo G é uma sequência

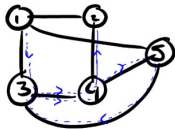
$W = v_1 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_{k+1}$, tal que as extremidades de e_i são v_i e v_{i+1} para todo $i = 1, \dots, k$.

Caminhos

Definição (Passeio)

Um **passeio** (walk) em um grafo G é uma sequência

$W = v_1 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_{k+1}$, tal que as extremidades de e_i são v_i e v_{i+1} para todo $i = 1, \dots, k$.



• Passeio

$W = 1 - 3 - 4 - 5 - 3 - 4 - 2$

pode ter repetições

• Outro passeio

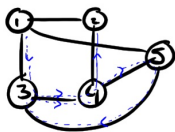
$4 - 2 - 1 - 3 - 4$

Caminhos

Definição (Passeio)

Um **passeio** (walk) em um grafo G é uma sequência

$W = v_1 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_{k+1}$, tal que as extremidades de e_i são v_i e v_{i+1} para todo $i = 1, \dots, k$.



• Passeio

$W = 1 - 3 - 4 - 5 - 3 - 4 - 2$

pode ter repetições

• Outro passeio

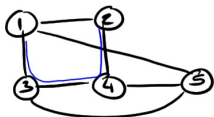
$4 - 2 - 1 - 3 - 4$

Obs: Em um grafo **simplex** não é necessário indicar as arestas de W , pois par de vértices identifica de forma única uma aresta

Caminhos

Definição (Caminho)

Um **caminho** é um passeio onde *todos os vértices são distintos*



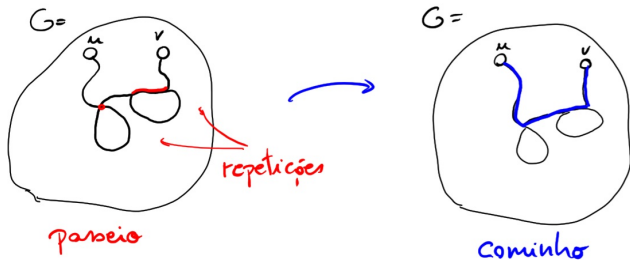
①-③-④-② é caminho

①-③-④-⑤-③-④-②
não é caminho
repetição

Pergunta: Se existe um passeio de u para v , então existe um caminho de u pra v ?

Pergunta: Se existe um passeio de u para v , então existe um caminho de u pra v ?

Sim: Podemos começar com passeio (que tem repetição de nós) e “cortar caminho”, removendo repetições



Se um grafo tem “muitas arestas”, deve ter também um caminho grande

Se um grafo tem “muitas arestas”, deve ter também um caminho grande

O próximo lema faz isso formal

Proposição

Considere um grafo *simples* G . Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k . Então G possui um caminho com $\geq k + 1$ nós

Proposição

Considere um grafo *simples* G . Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k . Então G possui um caminho com $\geq k + 1$ nós

Prova: Suponha por *por contradição* que mesmo o maior caminho em G tem $\leq k$ nós

Proposição

Considere um grafo *simples* G . Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k . Então G possui um caminho com $\geq k + 1$ nós

Prova: Suponha por *por contradição* que mesmo o maior caminho em G tem $\leq k$ nós

Chame esse maior caminho de $P = v_1 v_2 \dots v_p$



Proposição

Considere um grafo *simples* G . Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k . Então G possui um caminho com $\geq k + 1$ nós

Prova: Suponha por *por contradição* que mesmo o maior caminho em G tem $\leq k$ nós

Chame esse maior caminho de $P = v_1 v_2 \dots v_p$



Considere o primeiro nó $v_1 \in P$. Como P tem no máximo $\leq k - 1$ outros nós além de $v_1 \dots$

\dots mas v_1 tem $\geq k$ vizinhos, então v_1 tem vizinho u fora de P



Proposição

Considere um grafo *simples* G . Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k . Então G possui um caminho com $\geq k + 1$ nós

Prova: Suponha por *por contradição* que mesmo o maior caminho em G tem $\leq k$ nós

Chame esse maior caminho de $P = v_1 v_2 \dots v_p$



Considere o primeiro nó $v_1 \in P$. Como P tem no máximo $\leq k - 1$ outros nós além de $v_1 \dots$

\dots mas v_1 tem $\geq k$ vizinhos, então v_1 tem vizinho u fora de P



Então encontramos caminho maior que P : $u \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \dots \rightarrow v_p$. Isso *contradiz* que P é maior caminho

Conectividade

Definição (Conectividade)

*Um grafo é **conexo/conectado** se pra todo par de nós u e v , existe um caminho no grafo entre u e v*

Conectividade

Definição (Conectividade)

*Um grafo é **conexo/conectado** se pra todo par de nós u e v , existe um caminho no grafo entre u e v*

Pergunta: Se G é conexo e adicionamos uma aresta, o que acontece?
E se removemos uma aresta?

Componentes conexos

Os componentes conexos são os “**blocos conexos**” do grafo

Definição

Considere um grafo G . Os componentes conexos C_1, C_2, \dots, C_k são uma partição dos nós de G tal que:

- (i) **Cada C_i é conexo:** Se u, v pertencem a um mesmo conjunto C_i , então **tem** caminho em G entre eles
- (ii) **Os C_i 's são separados:** Se u, v pertencem a conjuntos diferentes, então **não tem** caminho entre eles

Componentes conexos

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?

Resp: G conexo \Leftrightarrow tem exatamente 1 componente conexo

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?

Resp: G conexo \Leftrightarrow tem exatamente 1 componente conexo

Pergunta: Considere um nó em um componente conexo de um grafo. Para onde estão indo suas arestas?

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?

Resp: G conexo \Leftrightarrow tem exatamente 1 componente conexo

Pergunta: Considere um nó em um componente conexo de um grafo. Para onde estão indo suas arestas?

Resp: Para nós no mesmo componente conexo

Exercícios

Exercício 1: Prove se existe ou não um grafo com n nós tal que:

O maior caminho tem tamanho (número de arestas) $n - 1$

O maior caminho tem tamanho n ?

O maior caminho tem tamanho 2?

O maior caminho tem tamanho 1?

Exercício 2: O que acontece ao número de componentes conexos de G quando adicionamos uma aresta? E quando removemos uma aresta?

Exercício 3:* Considere um grafo **simples** com n nós. Prove que se todos os nós tem grau $\geq \frac{n}{2}$, então o grafo é conexo

Dica: Por contradição, assuma que não é conexo, e portanto tem mais de 1 componente conexo. Olhe para um nó no menor componente conexo; para onde estão indo suas $\geq \frac{n}{2}$ arestas?