Estruturas Discretas

Marco Molinaro

Indução Forte

Indução Forte X Indução Fraca

Para provar *Propriedade* para todo inteiro $n \geq n_0$ basta mostrar:

Indução (fraca)

- **(Caso base)** Que *Propriedade* vale para n_0

$n \rightarrow n+1$

- **(Passo indutivo)** Assume que *Propriedade* **vale para** n, mostra que vale para $n+1$

Indução Forte X Indução Fraca

Para provar *Propriedade* para todo inteiro $n \geq n_0$ basta mostrar:

Indução (fraca)

- **(Caso base)** Que *Propriedade* vale para n_0
- **(Passo indutivo)** Assume que *Propriedade* **vale para** n, mostra que vale para $n + 1$

Na verdade, no passo indutivo podemos utilizar que a **propriedade vale para todo caso menor ou igual a** n para provar que vale para $n + 1$

Indução Forte X Indução Fraca

Para provar *Propriedade* para todo inteiro $n \geq n_0$ basta mostrar:

Indução (fraca)

- **(Caso base)** Que *Propriedade* vale para n_0
- **(Passo indutivo)** Assume que *Propriedade* **vale para n**, mostra que vale para $n+1$

1, 2, 3, 4, 5 n $n+1$

Na verdade, no passo indutivo podemos utilizar que a **propriedade vale para todo caso menor ou igual a n** para provar que vale para $n+1$

CB

1, 2, 3, 4, 5, ...

PI

Indução forte

- **(Caso base)** Que *Propriedade* vale para n_0
- **(Passo indutivo)** Assume que propriedade vale para **todos os números $\{n_0, n_0+1, \ldots, n\}$**, mostra que vale para $n+1$

Mais informações p/ provar $n+1$ $\longrightarrow$ $n_0, \ldots, n-1, n$ $n+1$

Exemplos

Ex: $4 = 2 \times 2$

$5 = 5$

$8 = 2 \times 2 \times 2$

$10 = 2 \times 5$

Def: n é composto pode ser escrito como $n = a \times b$ $\quad a, b \neq n, 1$

Proposição

Para todo $n \geq 2$, n é um produto de alguns números primos (se o número é primo, o produto só tem um termo)

Exemplos

Proposição

Para todo $n \geq 2$, n é um produto de alguns números primos (se o número é primo, o produto só tem um termo)

Prova: Por indução **forte**

Caso base: $n = 2$. A propriedade vale para 2, pois é primo $n=2=2$ ✓

Exemplos

Proposição

Para todo $n \geq 2$, n é um produto de alguns números primos (se o número é primo, o produto só tem um termo)

Prova: Por indução **forte**
Caso base: $n = 2$. A propriedade vale para 2, pois é primo

Passo Indutivo. Assuma que **todos os números** $\{2, 3, \ldots, n\}$ são produtos de alguns números primos

Precisamos mostrar que $n + 1$ é produto de primos

Exemplos

Proposição

Para todo $n \geq 2$, n é um produto de alguns números primos (se o número é primo, o produto só tem um termo)

Prova: Por indução **forte**
Caso base: $n = 2$**.** A propriedade vale para 2, pois é primo

Passo Indutivo. Assuma que **todos os números** $\{2, 3, \ldots, n\}$ são produtos de alguns números primos

Precisamos mostrar que $n + 1$ é produto de primos

Caso 1: $n + 1$ **é primo.** Neste caso $n + 1$ tem a propriedade desejada

$n+1 = n+1$

Exemplos

Caso 2: $n+1$ **não é primo.** Então $n+1$ é composto

Exemplos

Caso 2: $n+1$ **não é primo.** Então $n+1$ é composto

Portanto existem naturais a, b diferente de $n+1$ tal que $n+1 = a \cdot b$.

Exemplos

Caso 2: $n + 1$ **não é primo.** Então $n + 1$ é composto

Portanto existem naturais a, b diferente de $n + 1$ tal que $n + 1 = a \cdot b$.

Em particular a, b são **menores ou iguais a** n

Exemplos

Caso 2: $n+1$ **não é primo.** Então $n+1$ é composto

Portanto existem naturais a, b diferente de $n+1$ tal que $n+1 = a \cdot b$.

Em particular a, b são **menores ou iguais a** n

$\{2, 3, \ldots, n\}$
HI

Pela **hípotese indutiva** a é produto de alguns primos, e o mesmo vale para b

primo

$$a = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$$
$$b = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_l$$

Exemplos

Caso 2: $n+1$ **não é primo.** Então $n+1$ é composto

Portanto existem naturais a, b diferente de $n+1$ tal que $n+1 = a \cdot b$.

Em particular a, b são **menores ou iguais a** n

Pela **hípotese indutiva** a é produto de alguns primos, e o mesmo vale para b

Como $n+1 = a \cdot b, \quad n+1$ é produto de alguns número primos

Cuidado!

Muito cuidado: Em indução forte, muitas vezes precisamos **provar mais de um valor de n "na mão"**

Cuidado!

Muito cuidado: Em indução forte, muitas vezes precisamos **provar mais de um valor de n "na mão"**

Ou seja, temos multiplos **casos base**

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \qquad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \qquad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \qquad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:

Caso base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \quad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:

Caso base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Considere $n \geq 1$. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \qquad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:

Caso base: $n = 1$**.** Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Considere $n \geq 1$. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, t tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:

Caso base: $n = 1$**.** Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, t tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:

Caso base: $n = 1$**.** Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, t tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Substituindo na expressão de a_{n+1} temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2k+1) + 2 \cdot (2t+1) \\ &= 2k + 4t + 3 = 2(k + 2t + 1) + 1 \end{aligned}$$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:

Caso base: $n = 1$**.** Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, t tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Substituindo na expressão de a_{n+1} temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2k + 1) + 2 \cdot (2t + 1) \\ &= 2k + 4t + 3 = 2(k + 2t + 1) + 1 \end{aligned}$$

Portanto a_{n+1} é impar. Isso conclui o passo indutivo. Fim de prova.

O problema é que tentamos referenciar “2 pra trás” quando usamos $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, mas isso não é possivel quando $n + 1 = 2$

$$n - 1 = 0 \text{ e } a_0 \text{ não está definido}$$

O problema é que tentamos referenciar “2 pra trás” quando usamos $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, mas isso não é possivel quando $n + 1 = 2$

$$n - 1 = 0 \text{ e } a_0 \text{ não está definido}$$

(Note que esse referencia do tipo “2 pra trás” so acontece em indução **forte**)

O problema é que tentamos referenciar "2 pra trás" quando usamos $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, mas isso não é possivel quando $n + 1 = 2$

$$n - 1 = 0 \text{ e } a_0 \text{ não está definido}$$

(Note que esse referencia do tipo "2 pra trás" so acontece em indução **forte**)

Portanto, temos que provar para a_2 "na mão"

Prova correta:

Casos base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar

$n = 2$. Temos que $a_2 = 3$ é impar

Prova correta:

Casos base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar
$n = 2$. Temos que $a_2 = 3$ é impar

Passo indutivo. Considere $n \geq 2$. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, m tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Substituindo na expressão de a_{n+1} temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2k+1) + 2 \cdot (2t+1) \\ &= 2k + 4t + 3 = 2(k + 2t + 1) + 1 \end{aligned}$$

Portanto a_{n+1} é impar. Isso conclui o passo indutivo. Fim de prova.

Exercícios

Exercício 1: Prove por indução **forte** que todo valor maior ou igual a \$8 unidades pode ser pago exatamente utilizando apenas essas notas de \$3 e \$5

Verifique que você provou todos os casos base necessários

Exercicios

Exercicio 2: Considere o seguinte procedimento

Prog2(int n)
If n < 3
  Imprima('Oi') 4 vezes
  Return
Else
  Prog2(n-1)
  Prog2(n-2)
End if

Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra "OI" é impressa quando Prog2 é chamado com parâmetro n

Prove por indução (forte) que $T(n) \leq 4 \cdot (7/4)^n$ pra todo $n \geq 1$