Estruturas Discretas

Marco Molinaro

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

Proposição (forma original)

Se $\boldsymbol{A}$, *então* $\boldsymbol{B}$

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

Proposição (forma original)

Se $\boldsymbol{A}$, *então* $\boldsymbol{B}$

pode ser reescrita de forma de forma contrapositiva

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

Proposição (forma original)

Se $\boldsymbol{A}$*, então* $\boldsymbol{B}$

pode ser reescrita de forma de forma contrapositiva

Proposição (forma contrapositiva)

Se não $\boldsymbol{B}$*, então não* $\boldsymbol{A}$

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

Proposição (forma original)

Se $\boldsymbol{A}$*, então* $\boldsymbol{B}$

pode ser reescrita de forma de forma contrapositiva

Proposição (forma contrapositiva)

Se não $\boldsymbol{B}$*, então não* $\boldsymbol{A}$

Essas proposições são equivalentes: se uma é verdade a outra também é, e vice-versa

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

Proposição (forma original)

Se $\boldsymbol{A}$, *então* $\boldsymbol{B}$

pode ser reescrita de forma de forma contrapositiva

Proposição (forma contrapositiva)

Se não $\boldsymbol{B}$, *então não* $\boldsymbol{A}$

Essas proposições são equivalentes: se uma é verdade a outra também é, e vice-versa

Prova por contraposição: Provar a forma contrapositiva da proposição

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n, se $3n + 1$ é **impar** então n é **par***

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n, se $3n+1$ é ***impar*** *então n é* ***par***

Chato de provar de forma direta, difícil usar info $3n+1$ é **impar**

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n, se $3n + 1$ é ***impar*** *então n é* ***par***

Chato de provar de forma direta, difícil usar info $3n + 1$ é **impar**

Vamos tentar pela contrapositiva:

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n, se $3n+1$ é **impar** então n é **par***

Chato de provar de forma direta, difícil usar info $3n+1$ é **impar**

Vamos tentar pela contrapositiva:

*Para todo inteiro n, se n é **impar** então $3n+1$ é **par***

Essa forma parece mais facil, dá para usar a info de n é **impar**

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n, se $3n + 1$ é ***impar*** *então n é* ***par***

Prova por contraposição:

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n, se $3n+1$ é **impar** então n é **par***

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

$$\text{Para todo inteiro } n\text{, se } n \text{ é } \textbf{impar} \text{ então } 3n+1 \text{ é } \textbf{par} \tag{1}$$

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n, se $3n+1$ é ***impar*** *então n é* ***par***

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

$$\textit{Para todo inteiro } n, \textit{ se } n \textit{ é } \boldsymbol{impar} \textit{ então } 3n+1 \textit{ é } \boldsymbol{par} \tag{1}$$

Para isso, pegue inteiro **impar** n qualquer

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n, se $3n+1$ é ***impar*** *então n é* ***par***

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

$$\textit{Para todo inteiro } n, \textit{ se } n \textit{ é } \textbf{\textit{impar}} \textit{ então } 3n+1 \textit{ é } \textbf{\textit{par}} \tag{1}$$

Para isso, pegue inteiro **impar** n qualquer

Então existe inteiro k tal que $n = 2k+1$

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n, se $3n+1$ é **impar** então n é **par***

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

$$\textit{Para todo inteiro } n\textit{, se } n \textit{ é } \textbf{\textit{impar}} \textit{ então } 3n+1 \textit{ é } \textbf{\textit{par}} \tag{1}$$

Para isso, pegue inteiro **impar** n qualquer

Então existe inteiro k tal que $n = 2k+1$, e portanto:

$$\begin{aligned} 3n+1 &= 3(2k+1)+1 \\ &= 6k+4 \\ &= 2(3k+2) \end{aligned}$$

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n, se $3n+1$ é **impar** então n é **par***

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

$$\textit{Para todo inteiro } n, \textit{ se } n \textit{ é } \textbf{\textit{impar}} \textit{ então } 3n+1 \textit{ é } \textbf{\textit{par}} \tag{1}$$

Para isso, pegue inteiro **impar** n qualquer

Então existe inteiro k tal que $n = 2k+1$, e portanto:

$$\begin{aligned} 3n+1 &= 3(2k+1)+1 \\ &= 6k+4 \\ &= 2(3k+2) \end{aligned}$$

Portanto $3n+1$ é **par**, o que prova (1).

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n, se $3n+1$ é **impar** então n é **par***

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

$$\textit{Para todo inteiro } n, \textit{ se } n \textit{ é } \textbf{\textit{impar}} \textit{ então } 3n+1 \textit{ é } \textbf{\textit{par}} \tag{1}$$

Para isso, pegue inteiro **impar** n qualquer

Então existe inteiro k tal que $n = 2k+1$, e portanto:

$$\begin{aligned} 3n+1 &= 3(2k+1)+1 \\ &= 6k+4 \\ &= 2(3k+2) \end{aligned}$$

Portanto $3n+1$ é **par**, o que prova (1). Isso conclui a prova da proposição original

Contradição vs Contraposição

Contradição	**Contraposição**

Contradição vs Contraposição

Contradição	**Contraposição**
qualquer proposição	só proposição com implicação $A \Rightarrow B$

Contradição vs Contraposição

Contradição	**Contraposição**
qualquer proposição	só proposição com implicação $A \Rightarrow B$
assume prop falsa, contradição	prova $\neg B \Rightarrow \neg A$

Contradição vs Contraposição

Contradição	**Contraposição**
qualquer proposição	só proposição com implicação $A \Rightarrow B$
assume prop falsa, contradição	prova $\neg B \Rightarrow \neg A$
poderosa	simples

Exercícios

Exercício 1: Demonstre usando tabela verdade que "$A \Rightarrow B$" é equivalente a "$\neg B \Rightarrow \neg A$" (ou seja, prova por contraposição é correta)

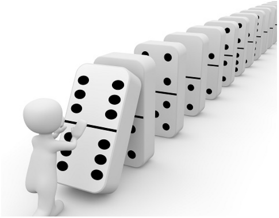
Exercício 2: Prove por contraposição:

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se $f(x) < f(y)$, então $x < y$
2. Seja n um número inteiro e d um de seus divisores. Se n é impar então d é impar

Indução Matemática

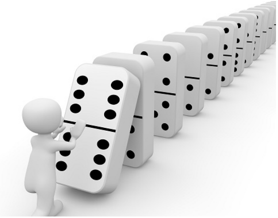
Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



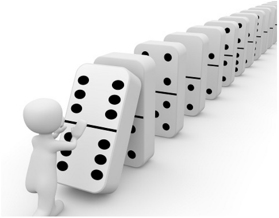
Princípio da Indução: domino

Em uma fileira de dominos

- Se o primeiro domino cai

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



Princípio da Indução: **domino**

Em uma fileira de dominos

- Se o primeiro domino cai
- E cada domino caindo derruba o próximo

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

Princípio da Indução: **domino**

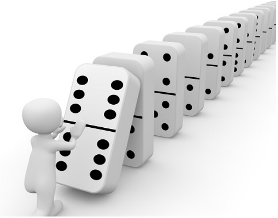
Em uma fileira de dominos

- Se o primeiro domino cai
- E cada domino caindo derruba o próximo

Então **todos** os dominos caem

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

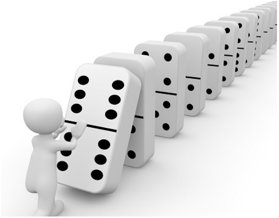


Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



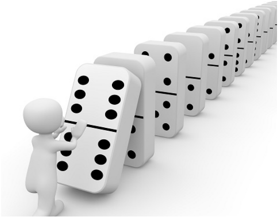
Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



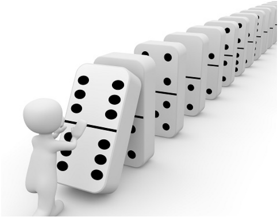
Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0
- **(Passo indutivo)** Para qualquer $n \geq n_0$, se *Propriedade* vale para n, então vale para $n+1$

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0
- **(Passo indutivo)** Para qualquer $n \geq n_0$, se *Propriedade* vale para n, então vale para $n + 1$

Então a *Propriedade* **vale para todo** inteiro $\geq n_0$

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)
Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, a n-ésima rodada tem   barras de ferro

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)
Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$*, a* n*-ésima rodada tem* 2^n *barras de ferro*

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)
Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, *a* n*-ésima rodada tem* 2^n *barras de ferro*

Prova:

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)
Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, a n-ésima rodada tem 2^n barras de ferro

Prova:
Propriedade que queremos provar para todo inteiro $n \geq 0$: rodada n tem 2^n barras de ferro

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)
Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, a n-ésima rodada tem 2^n barras de ferro

Prova:
Propriedade que queremos provar para todo inteiro $n \geq 0$: rodada n tem 2^n barras de ferro

Caso base: $n = 0$**.** Precisamos verificar que a propriedade vale nesse caso

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)
Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$*, a* n*-ésima rodada tem* 2^n *barras de ferro*

Prova:
Propriedade que queremos provar para todo inteiro $n \geq 0$: rodada n tem 2^n barras de ferro

Caso base: $n = 0$**.** Precisamos verificar que a propriedade vale nesse caso

Por definição a rodada 0 tem 1 barra de ferro, e portanto tem $2^0 = 1$ barras. Então a propriedade vale pro caso base

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n + 1$

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n+1$

Para isso vamos representar a situação da rodada $n+1$ em relação à rodada n:

$$[\#\ \text{barras na rodada } n+1] = 2 \cdot [\#\ \text{barras na rodada } n]$$

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n+1$

Para isso vamos representar a situação da rodada $n+1$ em relação à rodada n:

$$[\#\text{ barras na rodada } n+1] = 2 \cdot [\#\text{ barras na rodada } n]$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para n:

$$[\#\text{ barras na rodada } n+1] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n+1$

Para isso vamos representar a situação da rodada $n+1$ em relação à rodada n:

$$[\# \text{ barras na rodada } n+1] = 2 \cdot [\# \text{ barras na rodada } n]$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para n:

$$[\# \text{ barras na rodada } n+1] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Portanto a propriedade vale para $n+1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n+1$

Para isso vamos representar a situação da rodada $n+1$ em relação à rodada n:

$$[\# \text{ barras na rodada } n+1] = 2 \cdot [\# \text{ barras na rodada } n]$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para n:

$$[\# \text{ barras na rodada } n+1] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Portanto a propriedade vale para $n+1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Com isso, concluímos a prova por indução

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

Prova:

Propriedade que queremos provar pra todo $k \geq 1$:
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2$$

Prova:
Propriedade que queremos provar pra todo $k \geq 1$:
$\sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2$

Caso base: $k = 1$**.** Para provar o caso base, verificamos que a propriedade vale nesse caso: $(2 \cdot 1 - 1) = 1^2$

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2$$

Prova:
Propriedade que queremos provar pra todo $k \geq 1$:
$\sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2$

Caso base: $k = 1$**.** Para provar o caso base, verificamos que a propriedade vale nesse caso: $(2 \cdot 1 - 1) = 1^2$

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para k; precisamos mostrar que ela vale para $k + 1$

Exemplo

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para k; precisamos mostrar que ela vale para $k+1$

[Fazer explicitamente pra $k = 1$, $k = 2$?]

Exemplo

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para k; precisamos mostrar que ela vale para $k+1$

[Fazer explicitamente pra $k=1$, $k=2$?]

Para isso vamos representar a propriedade para $k+1$ em relação a propriedade para k:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)}_{\text{prop para } k+1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(2i-1)}_{\text{prop para } k} + (2[k+1]-1)$$

Exemplo

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para k; precisamos mostrar que ela vale para $k+1$

[Fazer explicitamente pra $k = 1$, $k = 2$?]

Para isso vamos representar a propriedade para $k+1$ em relação a propriedade para k:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)}_{\text{prop para } k+1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(2i-1)}_{\text{prop para } k} + (2[k+1]-1)$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para k:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = k^2 + (2[k+1]-1)$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= {\color{red}k^2} + (2[k+1]-1)\\ &= k^2+2k+1\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= {\color{red}k^2} + (2[k+1]-1)\\ &= k^2+2k+1\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Portanto a propriedade vale para $k+1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Exemplo

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = k^2 + (2[k+1]-1)$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k+1)^2$$

Portanto a propriedade vale para $k+1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Com isso, concluímos a prova por indução

Exercícios

Exercício: Prove por indução as seguintes proposições

1. Para todo inteiro $n \geq 2$, $2^{n+1} < 3^n$
2. Todo número inteiro $n \geq 0$ é par ou impar (veja definição de par/impar no slide da última aula)
3. (Progressão aritmética) Para todo inteiro $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. (Progressão geométrica) Considere um número real $r \neq 0$. Para todo inteiro $n \geq 0$,

$$r^0 + r^1 + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Exemplos

Considere o seguinte código

```
Prog1(int n)
    If n=1
        Print('OI')
        Return
    Else
        For i = 1 to n
            Print('OI')
        End for
        Prog1(n-1)
    End if
```

Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra "OI" é impressa quando Prog1 é chamado com parâmetro n

Proposição

Para todo inteiro $n \geq 1$, $T(n) \leq n^2$

Exemplos

Teorema

A soma dos angulos de um triangulo é 180

Exemplos

Teorema

A soma dos angulos de um triangulo é 180

Não vamos provar esse teorema

Exemplos

Teorema

A soma dos angulos de um triangulo é 180

Não vamos provar esse teorema

Mas vamos utilizar pra provar a seguinte generalização

Exemplos

Teorema

A soma dos angulos de um triangulo é 180

Não vamos provar esse teorema

Mas vamos utilizar pra provar a seguinte generalização

Proposição

A soma dos ângulos de um polígono convexo de n vértices é $180(n-2)$ para todo $n \geq 3$.

Prova: (um pouco informal, precisa de mais detalhes)

Caso base: $n = 3$ Nesse caso o poligono é um triangulo, e sabemos pelo teorema acima que

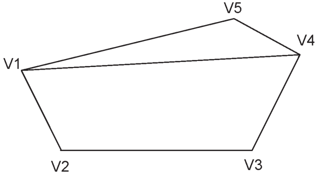
$$\text{soma dos angulos } = 180 = 180 \cdot (3 - 2).$$

Exemplos

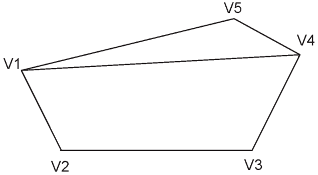
Passo Indutivo. Considere $n \geq 3$ e assuma que a propriedade vale para n

(hipótese indutiva)

Precisamos mostrar que ela também vale para $n + 1$.

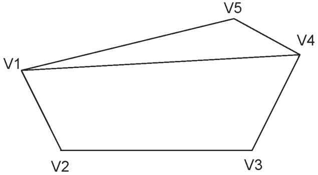


Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, ..., V_{n+1}$



Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$

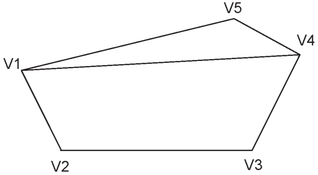
Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n



Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desta forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

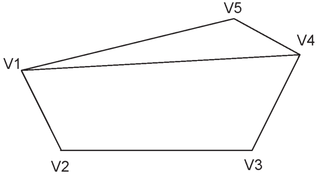


Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, ..., V_{n+1}$

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desta forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

A soma dos angulos do triangulo é 180.

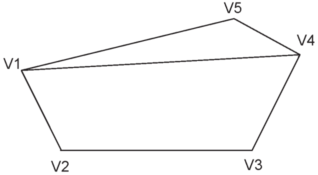


Considere um polígono com $n + 1$ vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desta forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

A soma dos angulos do triangulo é 180. E pela **hipótese indutiva** a soma dos angulos do poligono restante é $180(n - 2)$



Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desta forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

A soma dos angulos do triangulo é 180. E pela **hipótese indutiva** a soma dos angulos do poligono restante é $180(n-2)$

Logo a soma dos angulos do poligono original é [triangulo] + [resto]:

$$180 + 180(n-2) = 180((n+1)-2).$$

Exercício

Exercício: Considere o seguinte código

```
Prog2(int n)
    If n=1
        Print('OI')
        Return
    Else
        For i = 1 to n
            Print('OI')
        End for
        Prog2(n-1)
        Prog2(n-1)
    End if
```

Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra "OI" é impressa quando Prog2 é chamado com parâmetro n

Mostre que para todo inteiro $n \geq 1$, $T(n) \leq 2^n \cdot n$

Dica: Pode usar fato que $n \leq 2^n$ para todo $n \geq 1$