Emparelhamentos

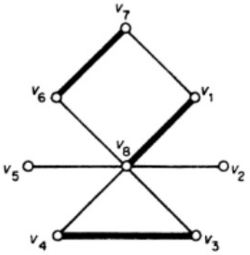
Emparelhamento

Hoje, grafos são não-direcionados

Definição

*Um **emparelhamento** M é um conjunto de arestas que não compartilham nenhum nó*

Dizemos que um nó é casado/emparelhado se é a ponta de alguma aresta no emparelhamento



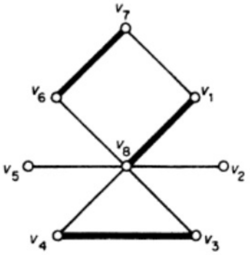
Emparelhamento

Hoje, grafos são não-direcionados

Definição

*Um **emparelhamento** M é um conjunto de arestas que não compartilham nenhum nó*

Dizemos que um nó é casado/emparelhado se é a ponta de alguma aresta no emparelhamento



Emparelhamento

Aparecem em múltiplas aplicações:

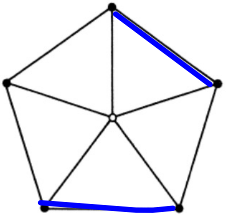
- Atribuição de projetos a pessoas
- Atribuição de candidatos a vagas
- Kidney exchange
- ...

Emparelhamento

Aparecem em múltiplas aplicações:

- Atribuição de projetos a pessoas
- Atribuição de candidatos a vagas
- Kidney exchange
- ...

Pergunta? Qual o maior emparelhamento num dado grafo?



Uma estrutura importante em emparelhamentos máximos é a seguinte:

Definição (Caminho aumentante)

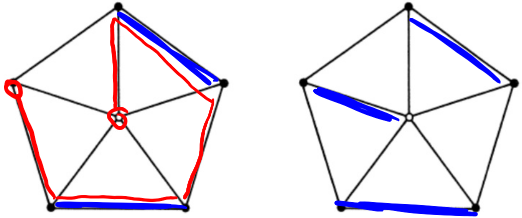
Dado um grafo G e um emparelhamento M, um caminho $P \equiv v_0 v_1 \ldots v_k$ é ***aumentante com relação a*** *M se:*

são distintos e

1) Os nós v_0 e v_k (início e fim) não estão casados com ninguem pelo emparelhamento

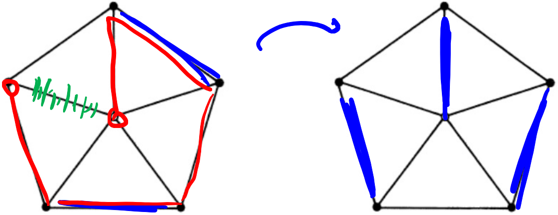
não pertence

2) As arestas de P alternam: pertence ao emparelhamento, não pertence, pertence, etc.

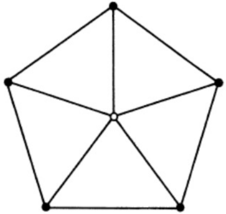


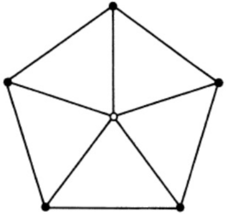
Emparelhamento

Pergunta: Considere um emparelhamento M e suponha que exista um caminho aumentante P com relação a M. Podemos usa P para aumentar M?



Pergunta: Considere um emparelhamento M e suponha que exista um caminho aumentante P com relação a M. Podemos usa P para aumentar M?





Resp: Sim: basta trocar as arestas ao longo do caminho: remova as que pertenciam ao emparelhamento, e adicione as que não pertenciam

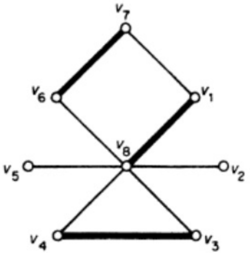
Exercício: Prove que o conjunto de arestas M' obtido é um emparelhamento, e que tem mais arestas que M

Emparelhamento

O contrário também ocorre: se não exite caminho aumentante, então não tem como aumentar o emparelhamento

Teorema (Teorema de Berge)

Considere um grafo G e um emparelhamento M. Então M é o maior emparelhamento do grafo se e somente se não existe caminho aumentante com relação a M



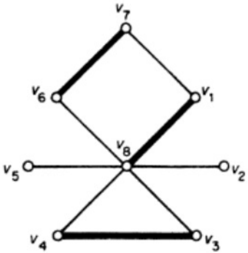
← não tem com. aum.
⇒ maior emparelhamento

Emparelhamento

O contrário também ocorre: se não exite caminho aumentante, então não tem como aumentar o emparelhamento

Teorema (Teorema de Berge)

Considere um grafo G e um emparelhamento M. Então M é o maior emparelhamento do grafo se e somente se não existe caminho aumentante com relação a M



não tem cam. aum.

$\Rightarrow$ maior emparelhamento

Emparelhamento

Isso nos dá um “algoritmo” para encontrar o maior emparelhamento em um grafo:

1) Comece com qualquer emparelhamento M (por exemplo, $M = \emptyset$)
2) Tente encontrar um caminho aumentante com relação a M
3) Caso encontre, aumente M utilizando esse caminho, e repita o Passo 2
4) Caso contrário o emparelhamento atual é máximo, retorne-o

Emparelhamento

Isso nos dá um “algoritmo” para encontrar o maior emparelhamento em um grafo:

1) Comece com qualquer emparelhamento M (por exemplo, $M = \emptyset$)
2) Tente encontrar um caminho aumentante com relação a M
3) Caso encontre, aumente M utilizando esse caminho, e repita o Passo 2
4) Caso contrário o emparelhamento atual é máximo, retorne-o

Emparelhamento

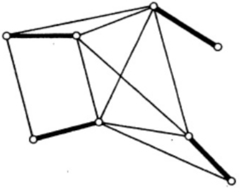
Isso nos dá um "algoritmo" para encontrar o maior emparelhamento em um grafo:

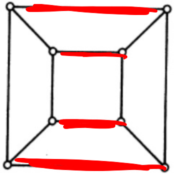
1) Comece com qualquer emparelhamento M (por exemplo, $M = \emptyset$)
2) Tente encontrar um caminho aumentante com relação a M
3) Caso encontre, aumente M utilizando esse caminho, e repita o Passo 2
4) Caso contrário o emparelhamento atual é máximo, retorne-o

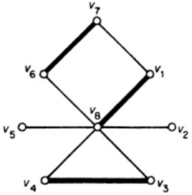
A dificuldade é tentar encontrar o caminho aumentante...

Definição (Emparelhamento perfeito)

*Um emparelhamento é **perfeito** se todos os nós ficam casados*





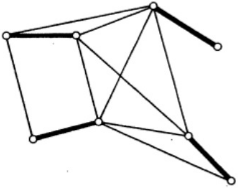


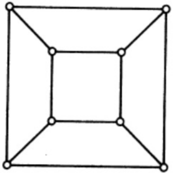
não tem emp. perf.

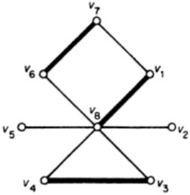
Emparelhamento

Definição (Emparelhamento perfeito)

*Um emparelhamento é **perfeito** se todos os nós ficam casados*







Pergunta: Quais grafos tem emparelhamento perfeito?

Emparelhamento

Pergunta difícil para grafos gerais… vamos estudar para uma classe importante de grafos

Emparelhamento

Pergunta difícil para grafos gerais…vamos estudar para uma classe importante de grafos

Definição (Grafo bipartido)

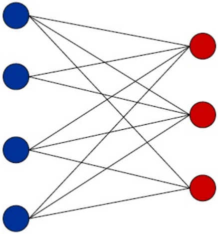
*Um grafo é **bipartido** se podemos particionar seus nós em 2 conjuntos, A e B, tal que todas as arestas tenham uma ponta em A e outra em B*

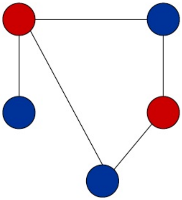
Emparelhamento

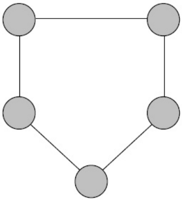
Pergunta difícil para grafos gerais... vamos estudar para uma classe importante de grafos

Definição (Grafo bipartido)

*Um grafo é **bipartido** se podemos particionar seus nós em 2 conjuntos, A e B, tal que todas as arestas tenham uma ponta em A e outra em B*







Emparelhamento

Dado um grafo bipartido G e um conjunto S de nós em um lado, usamos $N(S)$ (*neighbors*) pra denotar os vizinhos de S, ou seja:

nó u pertence a $N(S)$ se e somente se existe aresta (u, v) com $v \in S$

Emparelhamento

De volta a emparelhamentos perfeitos... Mostramos uma condição necessária para existência de emparelhamento perfeito em grafos bipartidos

Lema

Considere um grafo bipartido G. Se G tem um emparelhamento perfeito então para todo conjunto do nós S de um lado temos

$$|N(S)| \geq |S|.$$

Emparelhamento

Lema

Considere um grafo bipartido G. Se G tem um emparelhamento perfeito então para todo conjunto do nós S de um lado temos

$$|N(S)| \geq |S|.$$

Prova: O emparelhamento perfeito "casa" cada nó em S com um vizinho diferente no outro lado

$\Rightarrow$ S tem pelo menos um vizinho pra cada um de seus nós

Emparelhamento

Na verdade, essa propriedade de vizinhos characteriza grafos bipartidos com emparelhamento perfeito

Teorema (Teorema de Hall)

Um grafo bipartido G tem emparelhamento perfeito se e somente se para todo conjunto S de nós de um lado,

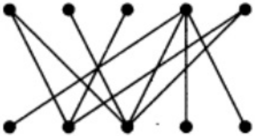
$$|N(S)| \geq |S|$$

Na verdade, essa propriedade de vizinhos characteriza grafos bipartidos com emparelhamento perfeito

Teorema (Teorema de Hall)

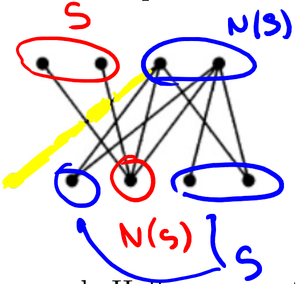
Um grafo bipartido G tem emparelhamento perfeito se e somente se para todo conjunto S de nós de um lado,

$$|N(S)| \geq |S|$$



Exercícios

Exercício 1: Encontre o maior emparelhamento no grafo abaixo



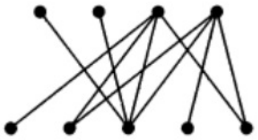
não tem com. aum.

Exercício 2: Use o Teorema de Hall para mostrar que o grafo acima não tem emparelhamento perfeito

Exercício 3: Mostre que todo grafo bipartido onde todos os nós tem grau k satisfaz a condição $|N(S)| \geq S \; \forall S$ do Teorema de Hall (e portanto tem emparelhamento perfeito)

Exercícios

Exercício 1: Encontre o maior emparelhamento no grafo abaixo



Exercício 2: Use o Teorema de Hall para mostrar que o grafo acima não tem emparelhamento perfeito

Exercício 3: Mostre que todo grafo bipartido onde todos os nós tem grau k satisfaz a condição $|N(S)| \geq S \ \forall S$ do Teorema de Hall (e portanto tem emparelhamento perfeito)