

Estruturas Discretas

Marco Molinaro

- 1 Tipos de Demonstração
 - Exemplos e Contra-Exemplos
 - Demonstração por Força Bruta
 - Prova Direta
 - Prova Construtiva

Demonstração

Queremos demonstrar proposições como essa:

Proposição

Para todo número inteiro n , $2n^3 - 3n^2 + n$ é divisível por 6.

Tipos de Demonstração

Exemplos e Contra-Exemplos

Quando a proposição começa com o quantificador **existe**, podemos prová-la exibindo só **um exemplo**.

Exemplos e Contra-Exemplos

Quando a proposição começa com o quantificador **existe**, podemos prová-la exibindo só **um exemplo**.

Proposição

Existe n inteiro tal que $n^2 + n + 5$ é um número primo.

Exemplos e Contra-Exemplos

Quando a proposição começa com o quantificador **existe**, podemos prová-la exibindo só **um exemplo**.

Proposição

Existe n inteiro tal que $n^2 + n + 5$ é um número primo.

Prova: O número inteiro $n = 1$ tem a propriedade desejada:
 $1^2 + 1 + 5 = 7$ é primo.

Exemplos e Contra-Exemplos

Contra-exemplo: Quando a proposição começa com o quantificador **para todo**, podemos **desprova-la** mostrando um exemplo que **nao** satisfaz a propriedade exigida

Exemplos e Contra-Exemplos

Contra-exemplo: Quando a proposição começa com o quantificador **para todo**, podemos **desprova-la** mostrando um exemplo que **nao** satisfaz a propriedade exigida

Proposição

Todo número primo é ímpar.

Exemplos e Contra-Exemplos

Contra-exemplo: Quando a proposição começa com o quantificador **para todo**, podemos **desprova-la** mostrando um exemplo que **nao** satisfaz a propriedade exigida

Proposição

Todo número primo é impar.

Prova que é falso: O número primo 2 é par.

Demonstração por Força Bruta

Força bruta: Testa todos os casos.

Demonstração por Força Bruta

Força bruta: Testa todos os casos.

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 e menor que 20, pode ser escrito como a soma de dois primos.

Demonstração por Força Bruta

Força bruta: Testa todos os casos.

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 e menor que 20, pode ser escrito como a soma de dois primos.

Prova: Basta resolver para todos os casos:

$$4=2+2 \quad 10=7+3 \quad 16=11+5$$

$$6=3+3 \quad 12=7+5 \quad 18=13+5$$

$$8=5+3 \quad 14=7+7$$

Demonstração por Força Bruta

Se no entanto modificarmos a proposição anterior para:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 e menor que 100.000 pode ser escrito como a soma de 2 primos.

Demonstração por Força Bruta

Se no entanto modificarmos a proposição anterior para:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 e menor que 100.000 pode ser escrito como a soma de 2 primos.

Prova: Utilizando-se um computador para gerar todas as possibilidades, procede-se de forma análoga à anterior.

Demonstração por Força Bruta

Se, no entanto, quisermos provar a proposição geral:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de 2 primos.

Demonstração por Força Bruta

Se, no entanto, quisermos provar a proposição geral:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de 2 primos.

Não podemos usar força bruta pois o conjunto é **infinito**

Demonstração por Força Bruta

Se, no entanto, quisermos provar a proposição geral:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de 2 primos.

Não podemos usar força bruta pois o conjunto é **infinito**

Esse problema está em **aberto**: *Conjectura de Goldbach*.

Demonstração por Prova Direta

Prova direta: encadeamento de argumentos lógicos a partir da **hipótese**, usando **coisas conhecidas** (axiomas, definições, ou outros teoremas (já provados))

Demonstração por Prova Direta

Definição

Um número inteiro n é **múltiplo** de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$

Demonstração por Prova Direta

Definição

Um número inteiro n é **múltiplo** de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$

Proposição

A soma de quaisquer 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3

Demonstração por Prova Direta

Definição

Um número inteiro n é **múltiplo** de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$

Proposição

A soma de quaisquer 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3

Prova:

- Sejam $x, x + 1, x + 2$ quaisquer 3 números inteiros consecutivos

Demonstração por Prova Direta

Definição

Um número inteiro n é **múltiplo** de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$

Proposição

A soma de quaisquer 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3

Prova:

- Sejam $x, x + 1, x + 2$ quaisquer 3 números inteiros consecutivos
- Sua soma é $S = x + (x + 1) + (x + 2)$. Logo:

Demonstração por Prova Direta

Definição

Um número inteiro n é **múltiplo** de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$

Proposição

A soma de quaisquer 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3

Prova:

- Sejam $x, x + 1, x + 2$ quaisquer 3 números inteiros consecutivos
- Sua soma é $S = x + (x + 1) + (x + 2)$. Logo:

$$S = x + (x + 1) + (x + 2) \Rightarrow$$

$$S = 3x + 3 \Rightarrow$$

$$S = 3(x + 1) \Rightarrow$$

$$\text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } S = 3k \Rightarrow$$

$$S \text{ é múltiplo de 3}$$

Demonstração por Prova Direta

Teorema

Considere 6 pontos distintos v_1, v_2, \dots, v_6 no plano, não colineares.

*Então **toda** maneira de colorir todos os segmentos de retas entre esse pontos usando as cores **azul** e **vermelho** produz pelo menos um **triângulo** cujos lados tem a mesma cor*

Demonstração por Prova Direta

Teorema

Considere 6 pontos distintos v_1, v_2, \dots, v_6 no plano, não colineares.

*Então **toda** maneira de colorir todos os segmentos de retas entre esse pontos usando as cores **azul** e **vermelho** produz pelo menos um **triângulo** cujos lados tem a mesma cor*

Vamos ver exemplos com 4,5,6 pontos pra tentar entender o teorema

Sempre faça exemplos concretos, ajuda muito

Teorema

Considere 6 pontos ... Então **toda** maneira de colorir todos os segmentos de retas entre esse pontos usando as cores azul e vermelho produz pelo menos um **triângulo** cujos lados tem a mesma cor

Teorema

Considere 6 pontos ... *triângulo* cujos lados tem a mesma cor

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Teorema

Considere 6 pontos ... *triângulo* cujos lados tem a mesma cor

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2** cores, **peelo menos** desses segmentos tem a mesma cor

Teorema

Considere 6 pontos ... *triângulo* cujos lados tem a mesma cor

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2** cores, **peelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Teorema

Considere 6 pontos ... *triângulo* cujos lados tem a mesma cor

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2** cores, **pele menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Teorema

Considere 6 pontos ... *triângulo* cujos lados tem a mesma cor

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2** cores, **pele menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Teorema

Considere 6 pontos ... *triângulo* cujos lados tem a mesma cor

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2** cores, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Caso 1: **Pelo menos um** dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ ou \overline{BC} tem cor X.

Teorema

Considere 6 pontos ... **triângulo** cujos lados tem a mesma cor

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Caso 1: **Pelo menos um** dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ ou \overline{BC} tem cor X. Logo, formaremos um triângulo de cor X. Por exemplo, se \overline{AB} for azul então o triângulo com vértices v_1, A, B é de cor X

Teorema

Considere 6 pontos ... **triângulo** cujos lados tem a mesma cor

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Caso 1: Pelo menos um dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} ou \overline{BC} tem cor X. Logo, formaremos um triângulo de cor X. Por exemplo, se \overline{AB} for azul então o triângulo com vértices v_1, A, B é de cor X

Caso 2: Nenhum dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} tem cor X.

Teorema

Considere 6 pontos ... **triângulo** cujos lados tem a mesma cor

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **peelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Caso 1: Pelo menos um dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ ou \overline{BC} tem cor X. Logo, formaremos um triângulo de cor X. Por exemplo, se \overline{AB} for azul então o triângulo com vértices v_1, A, B é de cor X

Caso 2: Nenhum dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ e \overline{BC} tem cor X. Então o triângulo com vértices A, B, C tem a cor oposta a X

Prova construtiva: Apresenta um método que constroi o objeto do qual a proposicao trata

Prova construtiva: Apresenta um método que constroi o objeto do qual a proposicao trata

Extensao do metodo de apresentar **1 exemplo:** podemos “construir” conjunto **infinito** de objetos

Teorema

Existem infinitas triplas (x, y, z) de números inteiros tais que

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (*)$$

[Faça exemplos de triplas com tal propriedade]

Prova: Note que $(3, 4, 5)$ satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Prova: Note que $(3, 4, 5)$ satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Agora considere as seguintes triplas (**construção**): $(3k, 4k, 5k)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Prova: Note que $(3, 4, 5)$ satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Agora considere as seguintes triplas (**construção**): $(3k, 4k, 5k)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Toda tripla dessa forma satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = 4^2k^2 + 3^2k^2 = (3^2 + 4^2)k^2 = 5^2k^2 = (5k)^2$$

Prova: Note que $(3, 4, 5)$ satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Agora considere as seguintes triplas (**construção**): $(3k, 4k, 5k)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Toda tripla dessa forma satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = 4^2k^2 + 3^2k^2 = (3^2 + 4^2)k^2 = 5^2k^2 = (5k)^2$$

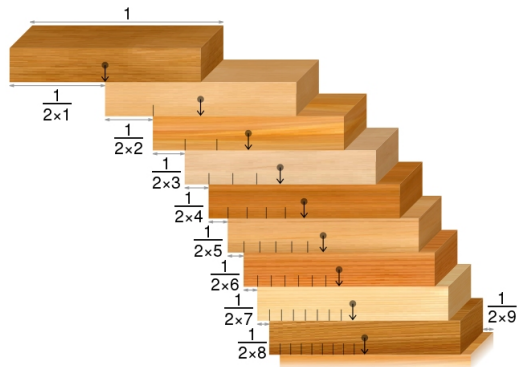
Construimos então infinitas triplas satisfazendo o desejado, provando o teorema

Serie harmonica:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Serie harmonica:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$



Teorema

A série harmônica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

*é divergente** (“vai para infinito”)

* Para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > M$

Prova Construtiva

Prova: Dado um M genérico, devemos apresentar uma forma de construir n , como função de M , tal que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > M$$

(Construção) Seja $n = 2^{2M}$. Tal n funciona:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^4 \frac{1}{i} + \sum_{i=5}^8 \frac{1}{i} + \dots + \sum_{i=n/2+1}^n \frac{1}{i} >$$

Prova Construtiva

Prova: Dado um M genérico, devemos apresentar uma forma de construir n , como função de M , tal que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > M$$

(Construção) Seja $n = 2^{2M}$. Tal n funciona:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^4 \frac{1}{i} + \sum_{i=5}^8 \frac{1}{i} + \dots + \sum_{i=n/2+1}^n \frac{1}{i} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{2M \text{ vezes}} = M$$

Na expressão acima utilizamos o fato de que:

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} > 2^k \left(\frac{1}{2^{k+1}} \right) = \frac{1}{2}$$

Definição

Um número inteiro n é **par** se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$

Definição

Um número inteiro n é **ímpar** se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$

Exercício: Prove as proposições abaixo

- 1 Para todo inteiro par n , n^2 é par
- 2 Para todo inteiro ímpar x e todo inteiro ímpar y , xy é ímpar
- 3 Para todo inteiro n , $n(n + 1)$ é par
- 4 Para todo inteiro n , n é par se e somente se $n + 1$ é ímpar

Exercícios extras: Prove as proposições abaixo

- ① A soma de quaisquer dois números inteiros ímpares é um inteiro ímpar
- ② Todo número ímpar é a soma de dois números inteiros consecutivos
- ③ Para todo inteiro par x e todo inteiro y , xy é par