Estruturas Discretas

Marco Molinaro

Conteúdo

Quantificadores

Pergunta: Se trocarmos a **ordem** dos quantificadores, a proposicao continua a mesma?

Isso é, "$\forall x,\ \exists y,\ expressao$" é o mesmo que "$\exists y,\ \forall x,\ expressao$"?

Quantificadores

Pergunta: Se trocarmos a **ordem** dos quantificadores, a proposicao continua a mesma?

Isso é, "$\forall x,\ \exists y,\ expressao$" é o mesmo que "$\exists y,\ \forall x,\ expressao$"?

Nao! Por exemplo, considere conjuntos $A_1 = \{4, 5\}$ e $A_2 = \{6, 7\}$. A proposicao:

Proposição

Para todo $i \in \{1, 2\}$, *existe numero natural* n *tal que* $n \in A_i$

Quantificadores

Pergunta: Se trocarmos a **ordem** dos quantificadores, a proposicao continua a mesma?

Isso é, "$\forall x, \ \exists y, \ expressao$" é o mesmo que "$\exists y, \ \forall x, \ expressao$"?

Nao! Por exemplo, considere conjuntos $A_1 = \{4, 5\}$ e $A_2 = \{6, 7\}$. A proposicao:

Proposição

Para todo $i \in \{1, 2\}$, *existe numero natural* n *tal que* $n \in A_i$

é verdadeira; com a ordem trocada

Proposição (ordem trocada)

Existe numero natural n *tal que para todo* $i \in \{1, 2\}$, $n \in A_i$

Quantificadores

Pergunta: Se trocarmos a **ordem** dos quantificadores, a proposicao continua a mesma?

Isso é, "$\forall x,\ \exists y,\ expressao$" é o mesmo que "$\exists y,\ \forall x,\ expressao$"?

Nao! Por exemplo, considere conjuntos $A_1 = \{4, 5\}$ e $A_2 = \{6, 7\}$. A proposicao:

Proposição

Para todo $i \in \{1, 2\}$, *existe numero natural* n *tal que* $n \in A_i$

é verdadeira; com a ordem trocada

Proposição (ordem trocada)

Existe numero natural n *tal que para todo* $i \in \{1, 2\}$, $n \in A_i$

é falsa

Quantificadores

Ou seja, tem que ter cuidado com a ordem dos quantificadores

Quantificadores

Ou seja, tem que ter cuidado com a ordem dos quantificadores

Na verdade a ordem "$\forall x,\ \exists y$" é mais "fraca" que "$\exists y,\ \forall x$":

- Na primeira podemos pegar um y diferente pra cada x...
- mas na segunda, o mesmo y tem que funcionar para todos os x

Quantificadores

Ou seja, tem que ter cuidado com a ordem dos quantificadores

Na verdade a ordem "$\forall x,\ \exists y$" é mais "fraca" que "$\exists y,\ \forall x$":

- Na primeira podemos pegar um y diferente pra cada x...
- mas na segunda, o mesmo y tem que funcionar para todos os x

O teorema MINIMAX, essencialmente utilizado por John Nash em teoria de jogos, diz que em um caso especial podemos fazer essa troca

Demonstração

Queremos demonstrar proposições como essa:

Proposição

Para todo número inteiro n, $2n^3 - 3n^2 + n$ *é divisivel por 6.*

Tipos de Demonstração

Exemplos e Contra-Exemplos

Quando a proposição começa com o quantificador **existe**, podemos prová-la exibindo só **um exemplo**.

Quando a proposição começa com o quantificador **existe**, podemos prová-la exibindo só **um exemplo**.

Proposição

Existe n inteiro tal que $n^2 + n + 5$ é um número primo.

[~~Hipo~~ Proposição: Existe um zero da função Riemann $\neq 0$]

Quando a proposição começa com o quantificador **existe**, podemos prová-la exibindo só **um exemplo**.

Proposição

Existe n inteiro tal que $n^2 + n + 5$ é um número primo.

Prova: O número inteiro $n = 1$ tem a propriedade desejada: $1^2 + 1 + 5 = 7$ é primo. ∎

Proposição:

Para todo n par, n^2 é par

Pra provar que o "Para todo" é verdade:

$2, 4, 6, 8, 10 \ldots$

$4 \quad 16 \quad 36 \ldots$

Exemplos e Contra-Exemplos

Contra-exemplo: Quando a proposição começa com o quantificador **para todo**, podemos **desprova-la** mostrando um exemplo que **nao** satisfaz a propriedade exigida

Contra-exemplo: Quando a proposição começa com o quantificador **para todo**, podemos **desprova-la** mostrando um exemplo que **nao** satisfaz a propriedade exigida

Quero provar que é FALSA

Proposição

Todo número primo é impar.

Prova: FALSO, pois 2 é primo e não é impar

Exemplos e Contra-Exemplos

Contra-exemplo: Quando a proposição começa com o quantificador **para todo**, podemos **desprova-la** mostrando um exemplo que **nao** satisfaz a propriedade exigida

Proposição

Todo número primo é impar.

Prova que é falso: O número primo 2 é par.

Demonstração por Força Bruta

Força bruta: Testa todos os casos.

Demonstração por Força Bruta

Força bruta: Testa todos os casos.

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 *e menor que* 20*, pode ser escrito como a soma de dois primos.*

Demonstração por Força Bruta

Força bruta: Testa todos os casos.

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 e menor que 20, pode ser escrito como a soma de dois primos.

Prova: Basta resolver para todos os casos:

$4=2+2$	$10=7+3$	$16=11+5$
$6=3+3$	$12=7+5$	$18=13+5$
$8=5+3$	$14=7+7$	

Demonstração por Força Bruta

Se no entanto modificarmos a proposição anterior para:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 *e menor que* 100.000 *pode ser escrito como a soma de* 2 *primos.*

Demonstração por Força Bruta

Se no entanto modificarmos a proposição anterior para:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 *e menor que* 100.000 *pode ser escrito como a soma de* 2 *primos.*

Prova: Utilizando-se um computador para gerar todas as possibilidades, procede-se de forma análoga à anterior.

Demonstração por Força Bruta

Se, no entanto, quisermos provar a proposição geral:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de 2 primos.

Demonstração por Força Bruta

Se, no entanto, quisermos provar a proposição geral:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 *pode ser escrito como a soma de* 2 *primos.*

Não podemos usar força bruta pois o conjunto é **infinito**

Demonstração por Força Bruta

Se, no entanto, quisermos provar a proposição geral:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de 2 primos.

Não podemos usar força bruta pois o conjunto é **infinito**

Esse problema está em **aberto**: *Conjectura de Goldbach*.

Demonstração por Prova Direta

Prova direta: encadeamento de argumentos lógicos a partir da **hipótese**, usando **coisas conhecidas** (axiomas, definições, ou outros teoremas (já provados))

Demonstração por Prova Direta

Definição

*Um número inteiro n é **múltiplo** de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$*

Demonstração por Prova Direta

Definição

*Um número inteiro n é **múltiplo** de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$*

Proposição

A soma de quaisquer 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3

Demonstração por Prova Direta

Definição

Um número inteiro n é ***múltiplo*** *de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$*

Proposição

A soma de quaisquer 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3

Prova:

- Sejam $x, x+1, x+2$ quaisquer 3 números inteiros consecutivos

Demonstração por Prova Direta

Definição

*Um número inteiro n é **múltiplo** de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$*

Proposição

A soma de quaisquer 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3

Prova:

- Sejam $x, x+1, x+2$ quaisquer 3 números inteiros consecutivos
- Sua soma é $S = x + (x+1) + (x+2)$. Logo:

Demonstração por Prova Direta

Definição

*Um número inteiro n é **múltiplo** de um número inteiro ℓ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = \ell \cdot k$*

Proposição

A soma de quaisquer 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3

Prova:

- Sejam $x, x+1, x+2$ quaisquer 3 números inteiros consecutivos
- Sua soma é $S = x + (x+1) + (x+2)$. Logo:

$$
\begin{aligned}
& S = x + (x+1) + (x+2) \Rightarrow \\
& S = 3x + 3 \Rightarrow \\
& S = 3(x+1) \Rightarrow \\
& \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } S = 3k \Rightarrow \\
& S \text{ é múltiplo de } 3
\end{aligned}
$$

Demonstração por Prova Direta

Teorema

Considere 6 pontos distintos $v_1, v_2, \ldots, v_6$ no plano, não colineares.

*Então **toda** maneira de colorir todos os segmentos de retas entre esse pontos usando as cores azul e vermelho produz pelo menos um **triângulo** cujos **lados tem a mesma cor***

Demonstração por Prova Direta

Teorema

Considere 6 pontos distintos $v_1, v_2, \ldots, v_6$ no plano, não colineares.

*Então **toda** maneira de colorir todos os segmentos de retas entre esse pontos usando as cores azul e vermelho produz pelo menos um **triângulo** cujos **lados tem a mesma cor***

Vamos ver exemplos com 4,5,6 pontos pra tentar entender o teorema

Sempre faça exemplos concretos, ajuda muito

Teorema

Considere 6 pontos ... Então ***toda*** *maneira de colorir todos os segmentos de retas entre esse pontos usando as cores azul e vermelho produz pelo menos um* ***triângulo*** *cujos* ***lados tem a mesma cor***

Teorema

Considere 6 pontos . . . ***triângulo*** *cujos* ***lados tem a mesma cor***

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Teorema

Considere 6 pontos ... ***triângulo*** *cujos* ***lados tem a mesma cor***

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos** desses segmentos tem a mesma cor

Teorema

Considere 6 pontos . . . ***triângulo*** *cujos* ***lados tem a mesma cor***

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Teorema

Considere 6 pontos . . . ***triângulo*** *cujos* ***lados tem a mesma cor***

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Teorema

*Considere 6 pontos ... **triângulo** cujos **lados tem a mesma cor***

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Teorema

Considere 6 pontos ... ***triângulo*** *cujos* ***lados tem a mesma cor***

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Caso 1: **Pelo menos um** dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ ou $\overline{BC}$ tem cor X.

Teorema

*Considere 6 pontos … **triângulo** cujos **lados tem a mesma cor***

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Caso 1: **Pelo menos um** dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ ou $\overline{BC}$ tem cor X. Logo, formaremos um triângulo de cor X. Por exemplo, se $\overline{AB}$ for azul então o triângulo com vértices v_1, A, B é de cor X

Teorema

Considere 6 pontos ... ***triângulo*** *cujos* ***lados tem a mesma cor***

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Caso 1: **Pelo menos um** dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ ou $\overline{BC}$ tem cor X. Logo, formaremos um triângulo de cor X. Por exemplo, se $\overline{AB}$ for azul então o triângulo com vértices v_1, A, B é de cor X

Caso 2: **Nenhum** dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ **e** $\overline{BC}$ tem cor X.

Teorema

*Considere 6 pontos ... **triângulo** cujos **lados tem a mesma cor***

Prova: Considere uma coloração azul/branca qualquer dos segmentos

Como tem **cinco** segmentos conectando v_1 aos outros pontos e só **2 cores**, **pelo menos três** desses segmentos tem a mesma cor

Chame essa cor de X (azul ou branca)

Sejam A, B, C os pontos ligados a v_1 com a cor X

Caso 1: **Pelo menos um** dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ ou $\overline{BC}$ tem cor X. Logo, formaremos um triângulo de cor X. Por exemplo, se $\overline{AB}$ for azul então o triângulo com vértices v_1, A, B é de cor X

Caso 2: **Nenhum** dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ **e** $\overline{BC}$ tem cor X. Entao o triângulo com vértices A, B, C tem a cor oposta a X

Prova Construtiva

Prova construtiva: Apresenta um método que constroi o objeto do qual a proposicao trata

Prova Construtiva

Prova construtiva: Apresenta um método que constroi o objeto do qual a proposicao trata

Extensao do metodo de apresentar **1 exemplo**: podemos “construir” conjunto **infinito** de objetos

Teorema

Existem infinitas triplas (x, y, z) *de números inteiros tais que*

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (*)$$

[Faça exemplos de triplas com tal propriedade]

Prova Construtiva

Prova: Note que $(3, 4, 5)$ satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Prova Construtiva

Prova: Note que $(3, 4, 5)$ satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Agora considere as seguintes triplas (**construção**): $(3k, 4k, 5k)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Prova Construtiva

Prova: Note que $(3, 4, 5)$ satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Agora considere as seguintes triplas (**construção**): $(3k, 4k, 5k)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Toda tripla dessa forma satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = 4^2k^2 + 3^2k^2 = (3^2 + 4^2)k^2 = 5^2k^2 = (5k)^2$$

Prova Construtiva

Prova: Note que $(3, 4, 5)$ satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Agora considere as seguintes triplas (**construção**): $(3k, 4k, 5k)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Toda tripla dessa forma satisfaz a propriedade (*) desejada:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = 4^2k^2 + 3^2k^2 = (3^2 + 4^2)k^2 = 5^2k^2 = (5k)^2$$

Construimos então infinitas triplas satisfazendo o desejado, provando o teorema

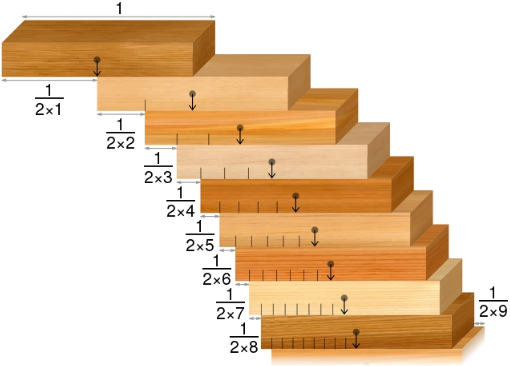
Prova Construtiva

Serie harmonica:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

Serie harmonica:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$



Prova Construtiva

Teorema

A série harmônica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

é divergente ("vai para infinito")*

* Para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > M$

Prova Construtiva

Prova: Dado um M genérico, devemos apresentar uma forma de construir n, como função de M, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > M$$

(**Construção**) Seja $n = 2^{2M}$. Tal n funciona:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{i} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{i} + \ldots + \sum_{i=n/2+1}^{n} \frac{1}{i} >$$

Prova Construtiva

Prova: Dado um M genérico, devemos apresentar uma forma de construir n, como função de M, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > M$$

(**Construção**) Seja $n = 2^{2M}$. Tal n funciona:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{i} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{i} + \ldots + \sum_{i=n/2+1}^{n} \frac{1}{i} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{2M \text{ vezes}} = M$$

Na expressão acima utilizamos o fato de que:

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} > 2^k \left(\frac{1}{2^{k+1}} \right) = \frac{1}{2}$$

Exercicios

Definição

*Um número inteiro n é **par** se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$*

Definição

*Um número inteiro n é **impar** se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$*

Exercicio: Prove as proposições abaixo

1. Para todo inteiro par n, n^2 é par
2. Para todo inteiro impar x e todo inteiro impar y, xy é impar
3. Para todo inteiro n, $n(n+1)$ é par
4. Para todo inteiro n, n é par se e somente se $n+1$ é impar

Exercicios

Exercicios extras: Prove as proposições abaixo

1. A soma de quaisquer dois números inteiros ímpares é um inteiro par
2. Todo número impar é a soma de dois números inteiros consecutivos
3. Para todo inteiro par x e todo inteiro y, xy é par