Grafos Direcionados:
Noções Básicas

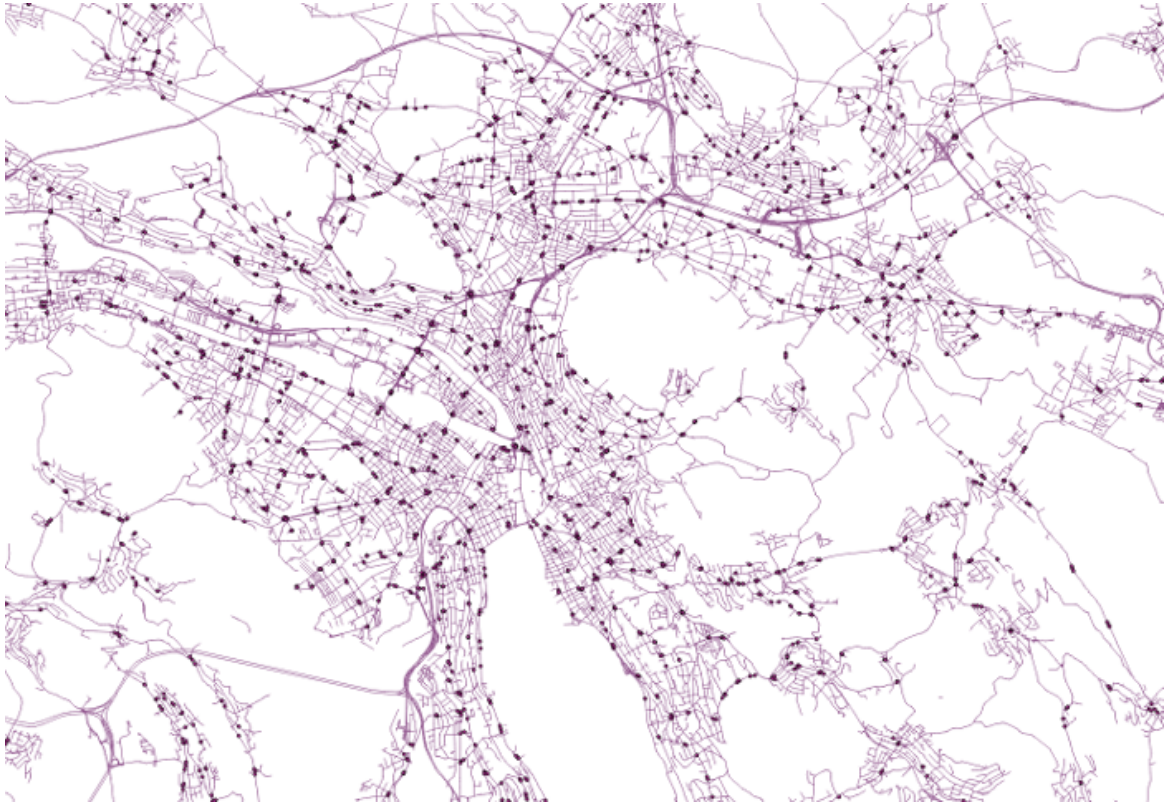
Grafos Direcionados

Em muitas aplicações, é importante ter direção nas arestas:

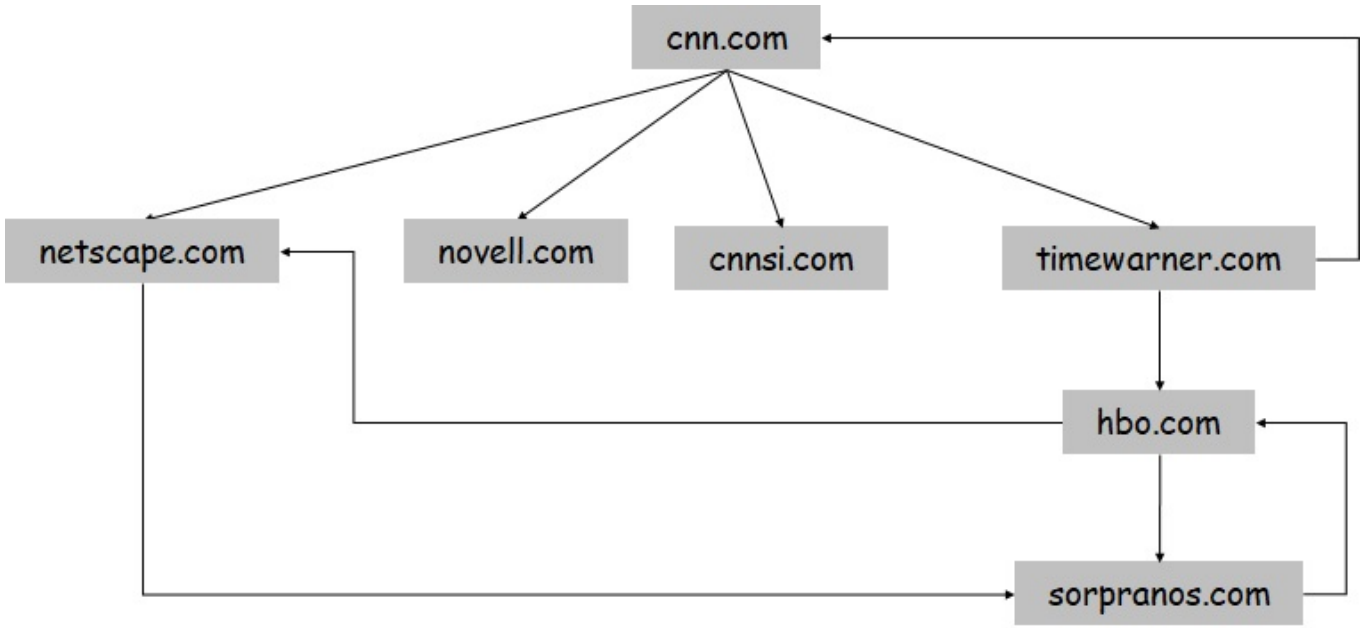
Grafos Direcionados

Em muitas aplicações, é importante ter direção nas arestas:

Redes de transporte

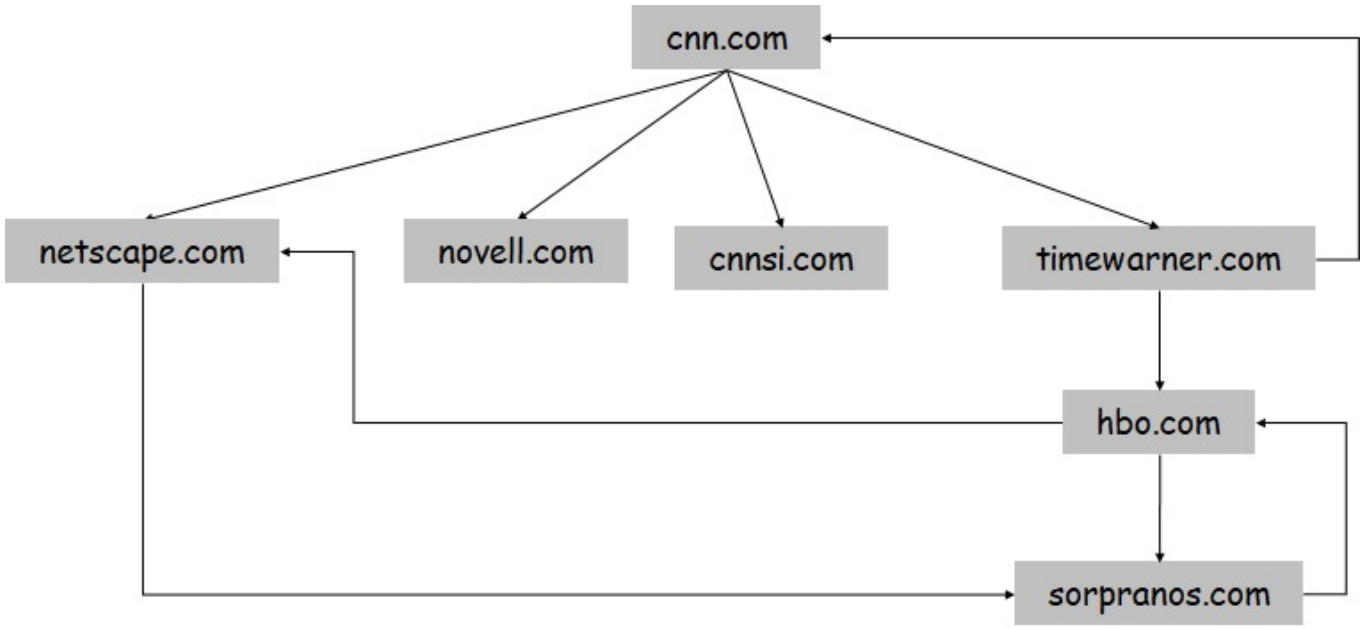


Grafo da internet



Grafos Direcionados

Grafo da internet



Disciplinas e seus pre-requisitos
Dependencia entre objetos/modulos
...

Grafos Direcionados

Grafos Direcionados

Isso motiva grafos direcionados

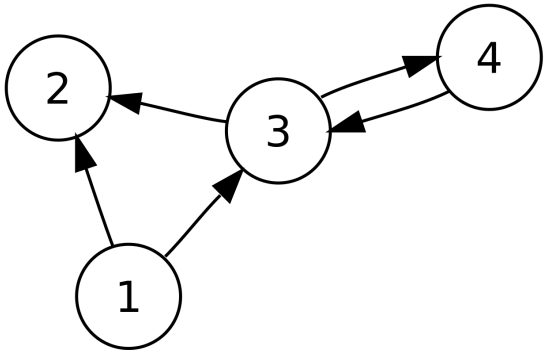
Grafos Direcionados

Isso motiva grafos direcionados

Definição

Um ***grafo direcionado*** G *é um par* (V, E) *onde*

1) V *é um conjunto [nós]*
2) E *é um conjunto de* ***pares ordendados*** *de nós [arcos ou arestas]*



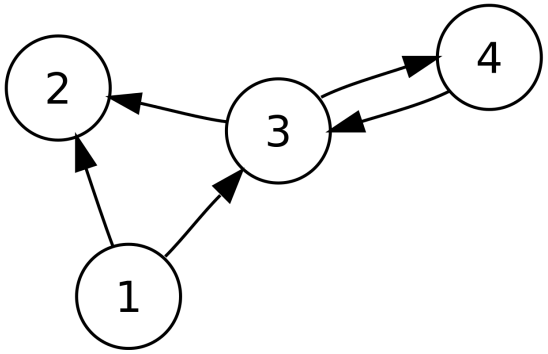
Grafos Direcionados

Definição (Grau de Entrada)

O ***grau de entrada*** $d^-(v)$ *de um vértice* v *é o número de arcos que chegam/apontam para* v

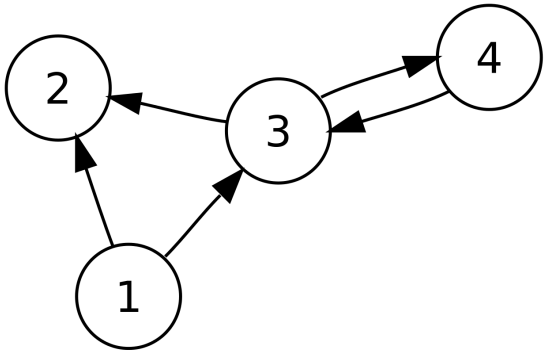
Definição (Grau de Saída)

O ***grau de saída*** $d^+(v)$ *de um vértice* v *é o número de arcos que saem de* v



Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?



Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?

Proposição

Num grafo ***direcionado*** $G = (V, E)$,

$$\textit{soma dos graus de saída} = \#\textit{arestas}$$

$$\equiv \qquad \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?

Proposição

Num grafo ***direcionado*** $G = (V, E)$,

$$\textit{soma dos graus de saída} = \#\textit{arestas}$$

$$\equiv \qquad \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Note que não tem mais o "2" multiplicando o número de arestas

Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?

Proposição

Num grafo ***direcionado*** $G = (V, E)$,

$$\textit{soma dos graus de saída} = \#\textit{arestas}$$

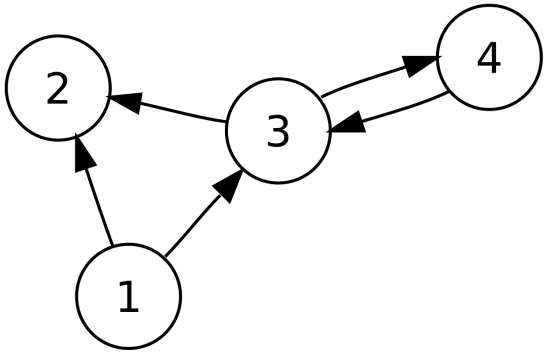
$$\equiv \qquad \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Note que não tem mais o "2" multiplicando o número de arestas

Prova: Por indução no número de arestas. Exercício importante

Grafos Direcionados

Pergunta: E qual a relação entre soma dos graus de saída e soma dos graus de entrada (ainda em grafos **direcionados**)?



Grafos Direcionados

Pergunta: E qual a relação entre soma dos graus de saída e soma dos graus de entrada (ainda em grafos **direcionados**)?

Proposição

Num grafo ***direcionado*** $G = (V, E)$,

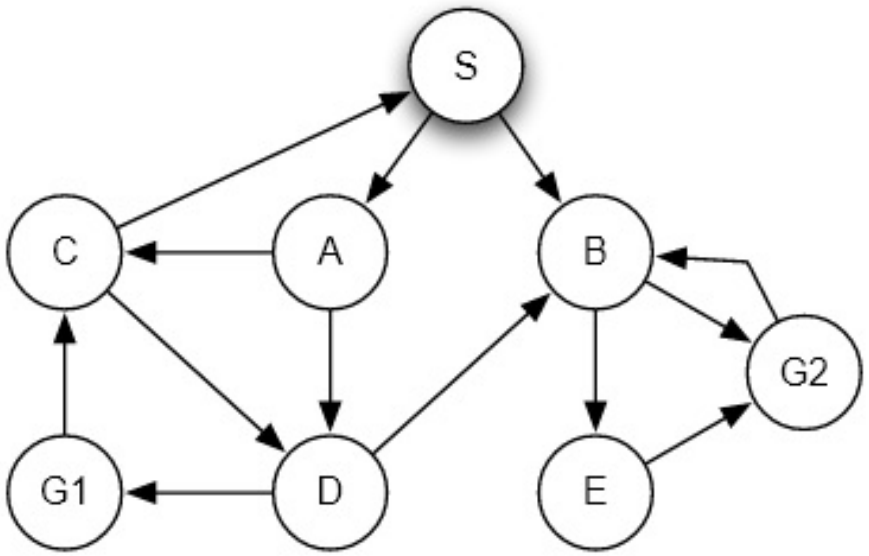
$$\textit{soma dos graus de saída} = \textit{somadosgrausdesada}$$

$$\equiv \qquad \sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v)$$

Prova: Por indução no número de arestas. Exercício importante

Passeios, caminhos, ciclos em Grafos Direcionados

As definições de **passeio, caminho, e ciclo** em grafos direcionados são análogas as que vimos para grafos direcionado

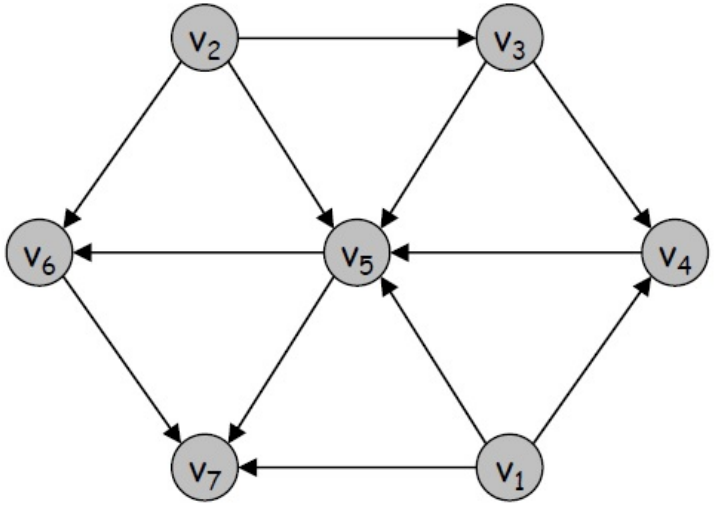


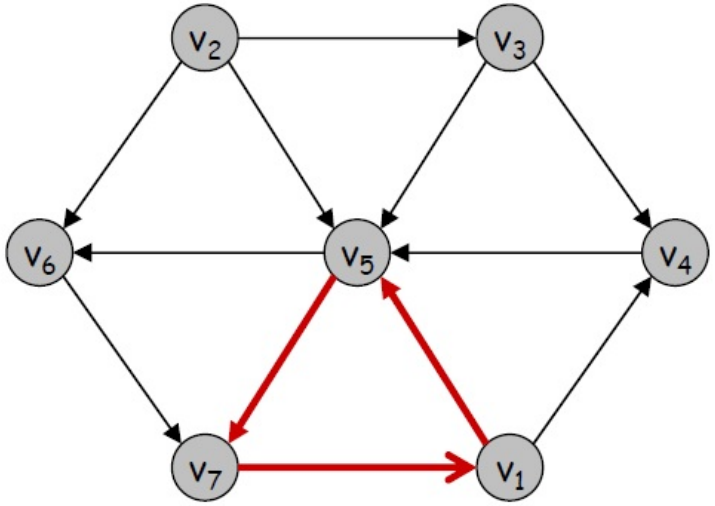
Grafos Direcionados Acíclicos

Grafos Direcionados Acíclicos

Definição

Um ***grafo direcionado acíclico (DAG)*** *é um grafo direcionado que não contém ciclos*





Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

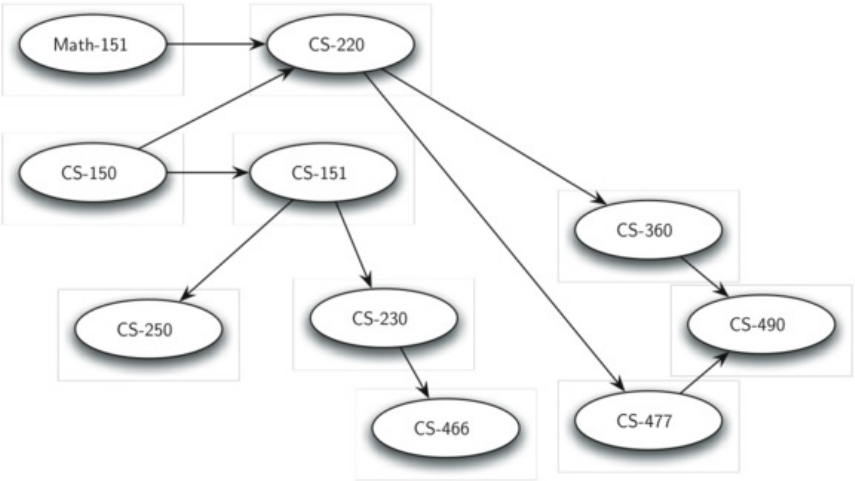
Muito usados para modelar relações de precedência: uma tarefa/disciplina/etc. tem que ser feita antes de outra

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

Muito usados para modelar relações de precedência: uma tarefa/disciplina/etc. tem que ser feita antes de outra

Exemplo: Grafo de disciplinas: nós são disciplinas, tem aresta (u, v) se uma matéria u é pré-requisito de matéria v

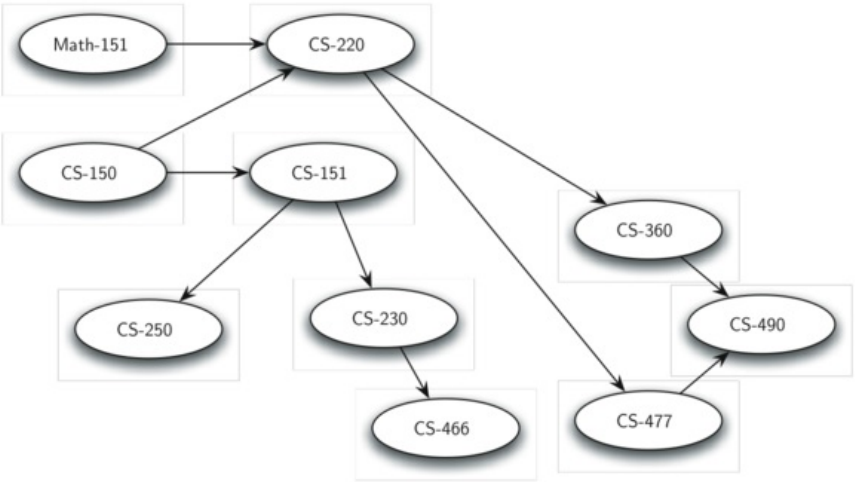


Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

Muito usados para modelar relações de precedência: uma tarefa/disciplina/etc. tem que ser feita antes de outra

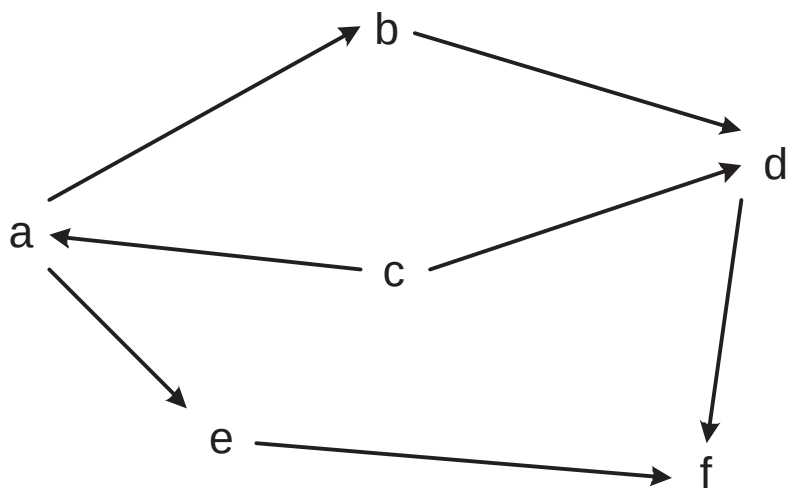
Exemplo: Grafo de disciplinas: nós são disciplinas, tem aresta (u, v) se uma matéria u é pré-requisito de matéria v



Não pode ter ciclo, senão não tem como acabar as matérias

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Dado tal grafo de disciplinas, em que ordem faze-las?



Grafos Direcionados Acíclicos

Tal ordem é chamada ordenação topológica do grafo

Intuitivamente queremos organizar os nós do grafo tal que arestas sempre vão da esquerda pra direita

Grafos Direcionados Acíclicos

Tal ordem é chamada ordenação topológica do grafo

Intuitivamente queremos organizar os nós do grafo tal que arestas sempre vão da esquerda pra direita

Definição

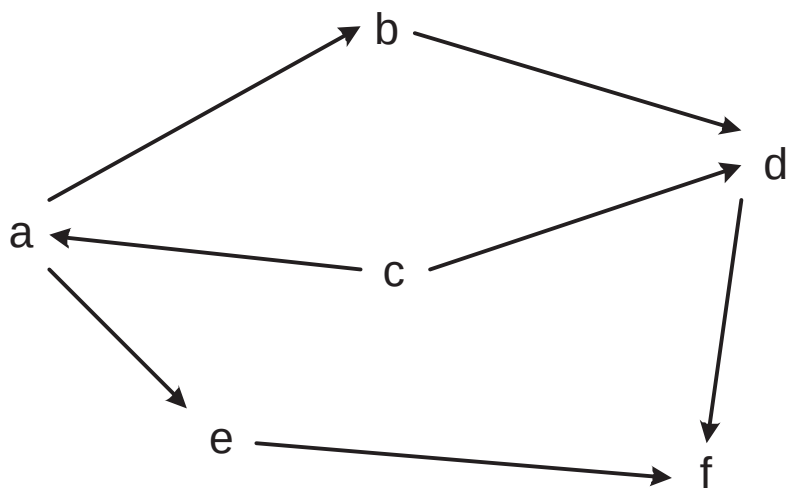
Uma ***ordenação topológica*** *de um grafo direcionado* $G = (V, E)$ *é uma atribuição de um número natural* $f(v) \in \mathbb{N}$ *a cada vértice* v *("sua posição na ordem") tal que:*

(i) Cada nó recebe valor diferente: $f(u) \neq f(v)$ *para* $u \neq v$

(ii) Para toda aresta $(u, v) \in E$ *temos* $f(u) < f(v)$ *(arestas da esquerda pra direita)*

Grafos Direcionados Acíclicos

Exemplo:



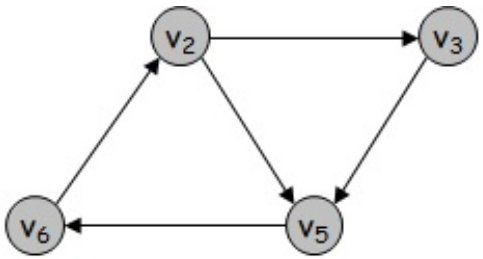
Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Todo grafo direcionado tem um ordem topológica?

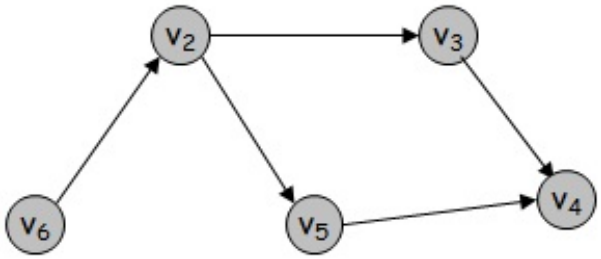
Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Todo grafo direcionado tem um ordem topológica?

Resp: Não



Não tem ordem topologica



Tem duas ordens topologicas

Grafos Direcionados Acíclicos

Perguntas: Quando um grafo possui ordem topológica?
Algoritmo para encontrar ordem topológica, caso exista?

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \qquad \text{ordem topológica}$$

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir de v_i na ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir antes de v_i na ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir antes de v_i na ordem topológica

$\Rightarrow$ contradição que v_i é o primeiro do ciclo na ordem $\square$

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: E o contrário

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{tem ordem topológica??}$$

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: E o contrário

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{tem ordem topológica??}$$

Resp: Sim!

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: E o contrário

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{tem ordem topológica??}$$

Resp: Sim!

Para provar precisamos de um lema...

Grafos Direcionados Acíclicos

Lema

Todo DAG tem/não tem? um vértice com grau de entrada 0

Grafos Direcionados Acíclicos

Lema

Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

Grafos Direcionados Acíclicos

Lema

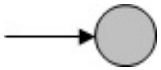
Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

Ideia: Caso contrário, pegue um nó e siga para seu "ante-vizinho", e seu "ante-vizinho", etc. $\Rightarrow$ ciclo!

Lema

Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

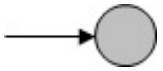
Prova: Por contradição considere um DAG G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



Lema

Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

Prova: Por contradição considere um DAG G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1

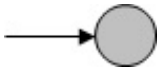


Seja $P = v_1 \ldots v_k$ um maior caminho no grafo

Lema

Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

Prova: Por contradição considere um DAG G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



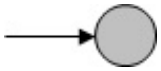
Seja $P = v_1 \ldots v_k$ um maior caminho no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

Lema

Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

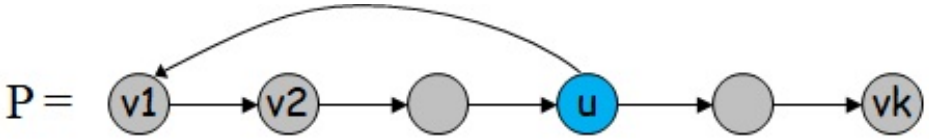
Prova: Por contradição considere um DAG G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



Seja $P = v_1 \ldots v_k$ um maior caminho no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

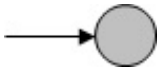
u pertence/não pertence? ao caminho P, pois G não tem ciclo



Lema

Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

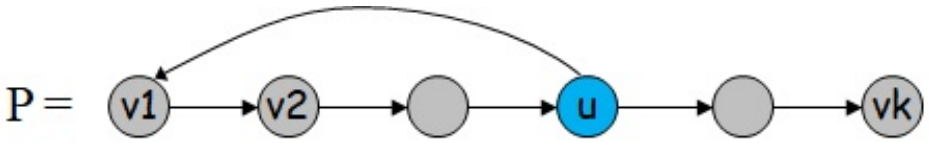
Prova: Por contradição considere um DAG G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



Seja $P = v_1 \ldots v_k$ um maior caminho no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

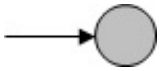
u não pertence ao caminho P, pois G não tem ciclo



Lema

Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

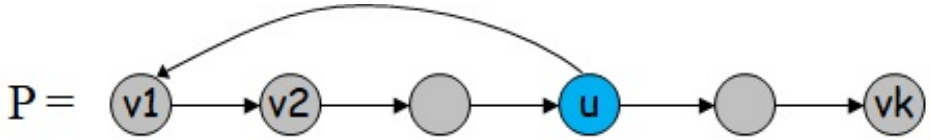
Prova: Por contradição considere um DAG G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



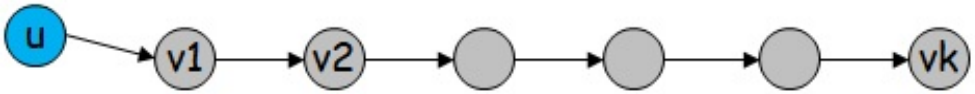
Seja $P = v_1 \ldots v_k$ um maior caminho no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

u não pertence ao caminho P, pois G não tem ciclo



Então temos um caminho maior do que P: $u \rightarrow v_1 v_2 \ldots v_k$



$\Rightarrow$ contradição que P era maior caminho $\square$

Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica:

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{ tem ordem topológica}$$

Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica:

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{ tem ordem topológica}$$

Prova: Por indução no número de vértices de G

Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica:

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{ tem ordem topológica}$$

Prova: Por indução no número de vértices de G

Caso base: G tem apenas um vértice $v \Rightarrow$ ordenação topológica trivial $f(v) = 1$

Passo Indutivo: Considere DAG G com $n+1$ nós

Pela proposição anterior, G tem um nó v com grau de entrada 0

Remova v do grafo, obtendo $G' = G - v$. Como G' é DAG e tem n nós, pela **hipótese indutiva** tem ordenação topológica f'

Crie uma ordenação topológica para o grafo original G colocando o nó v na frente, e continuando com a ordenação de G'

(Mais precisamente, defina a ord. top. f para G fazendo $f(v) = 1$ e $f(u) = f'(u) + 1$ para todo $u \neq v$)

Verifique que pra toda aresta (x, y) em G, $f(x) < f(y)$ $\square$

Grafos Direcionados Acíclicos

Ou seja, provamos o seguinte:

Teorema

Um grafo direcionado tem uma ordenação topológica se e somente se ele é acíclico:

$$G \text{ tem ordem topológica} \Leftrightarrow \text{não tem ciclo}$$

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

$f(v) = 1$

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

$f(v) = 1$

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

$f' \leftarrow$ OrdemTopologica$(G - v)$

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

$f(v) = 1$

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

$f' \leftarrow$ OrdemTopologica$(G - v)$

coloca v na frente dessa ordem

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

$f(v) = 1$

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

$f' \leftarrow$ OrdemTopologica$(G - v)$

coloca v na frente dessa ordem

For todo vértice u de $G - v$

$f(u) \leftarrow f'(u) + 1$

End for

$f(v) \leftarrow 1$

End if

Retorna f

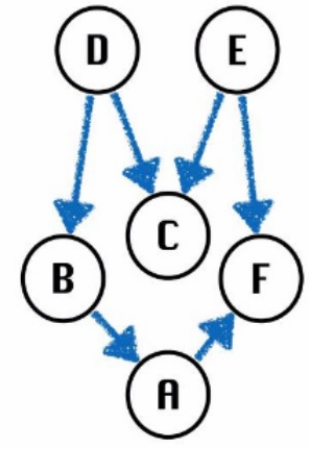
Exercícios

Exercício 1: Prove por indução que para todo grafo direcionado, a soma dos graus de saída é igual ao número de arestas:

$$\sum_{v} d^{+}(v) = \# \text{ de arestas}$$

Exercícios

Exercício 2: Quantas ordenações topológicas tem o grafo abaixo:



Exercício 3: Um aluno(a) tem disciplinas a serem feitas para obter seu diploma em Ciência/Engenharia de Computação. Essas disciplinas tem pré-requisitos entre elas, modelado como um DAG G

Dê um algoritmo recursivo **NumSemestres(**G**)** para encontrar o número **mínimo** de semestres necessários para o(a) aluno(a) obter o diploma.

Representações Computacionais

Representações Computacionais

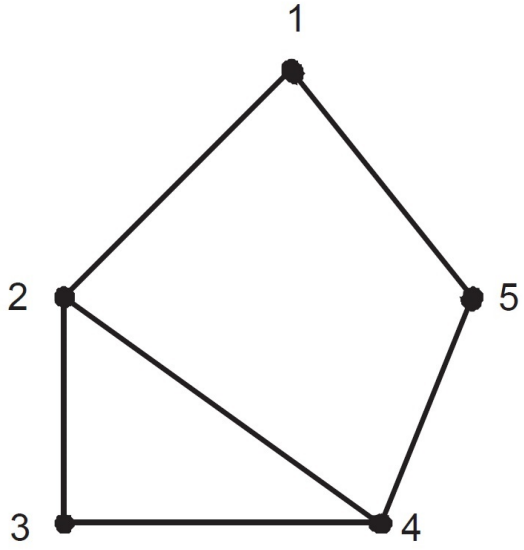
Para usar grafos, precisamos representá-los num computador

Matriz de Adjacência

Matriz de adjacência: Grafo não-direcionado. Matriz M

$$M[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i,j) \text{ está no grafo} \\ 0, & \text{se a aresta } (i,j) \text{ não está no grafo} \end{cases}$$

Num grafo não-direcionado a aresta (i,j) é a mesma coisa que (j,i). Então cada aresta aparece 2 vezes na matriz



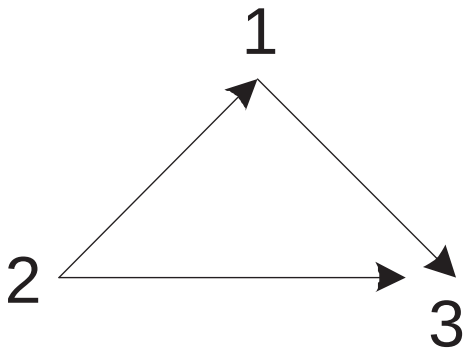
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	1	0

Matriz de Adjacência

Matriz de adjacência: Grafo direcionado. A mesma coisa: blue

$$M[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i,j) \text{ está no grafo} \\ 0, & \text{se a aresta } (i,j) \text{ não está no grafo} \end{cases}$$

A única diferença é que no caso direcionado cada aresta só aparece 1 vez



	1	2	3
1	0	0	1
2	1	0	1
3	0	0	0

Matriz de Adjacência

Vantagens:

- Simples
- Algumas operações ficam muito eficientes
  (e.g. tem a aresta (i, j) no grafo?)

Matriz de Adjacência

Vantagens:

- Simples
- Algumas operações ficam muito eficientes (e.g. tem a aresta (i, j) no grafo?)

Desvantagem: Ocupa espaço $\approx$ (#nós)^2. Desperdício, especialmente quando tem "poucas" arestas (note que tem muitos 0's):

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	0	1	0

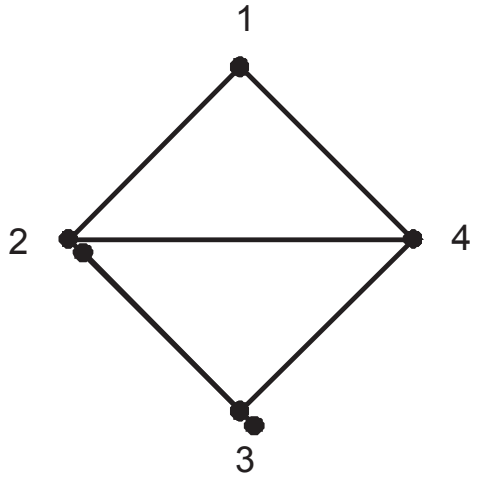
Lista de Adjacência

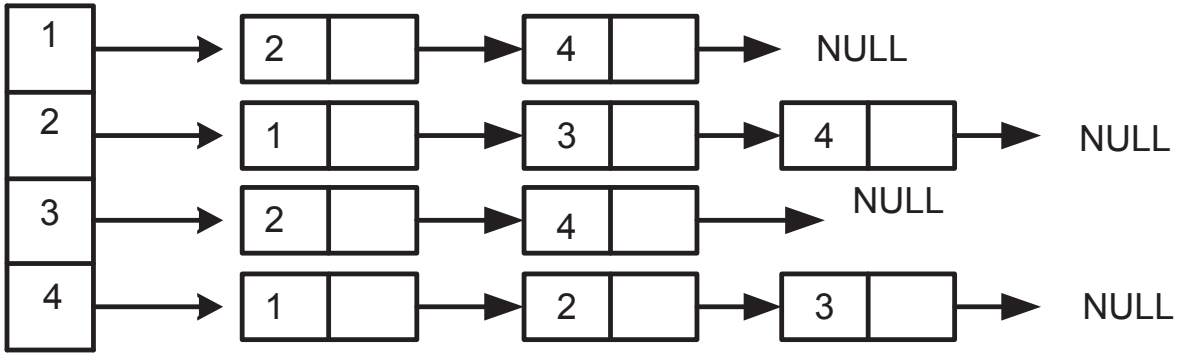
Em muitos casos, lidamos com grafos esparsos, ou seja, com "poucas" arestas. Nesse caso é um desperdício utilizar n^2 posições de memória. A proxima figura mostra um grafo com 5 vértices e 4 arestas, e sua matriz de adjacências. Observe que a maioria das entradas são nulas.

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Listas de Adjacência

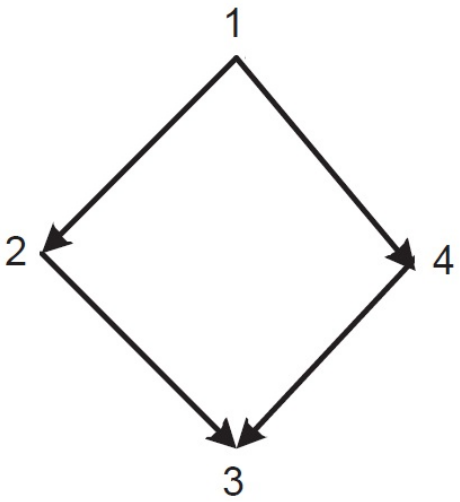
Listas de adjacência: Grafo não-direcionado. Pra cada nó, lista encadeada com seus vizinhos

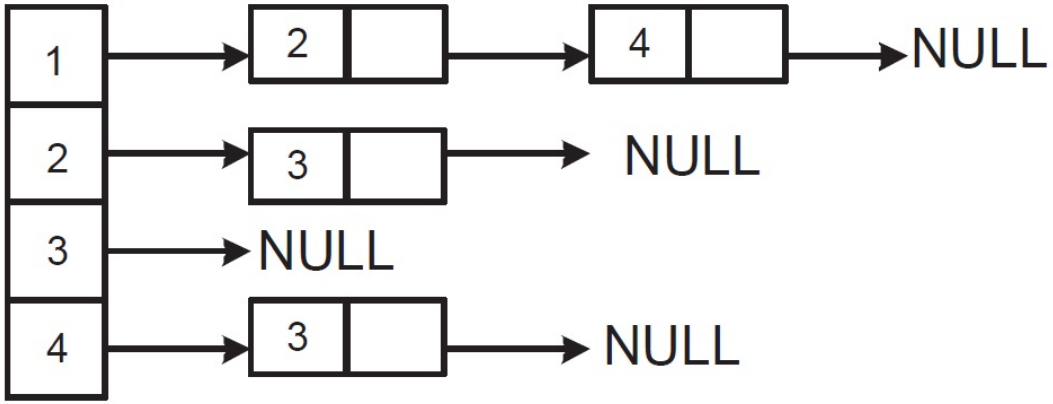




Listas de Adjacência

Listas de adjacência: Grafo direcionado. Pra cada nó, lista encadeada com seus vizinhos **"pra frente"**





Listas de Adjacência

Vantagens:

- Algumas operações ficam eficientes (e.g. listar os vizinhos de um nó)
- Espaço proporcional a $\approx$ #nós + #arestas

Listas de Adjacência

Vantagens:

- Algumas operações ficam eficientes (e.g. listar os vizinhos de um nó)
- Espaço proporcional a $\approx$ #nós + #arestas

Desvantagem: Algumas operações ficam menos eficientes (e.g. tem a aresta (i, j) no grafo?)