# Ciclos

Informalmente, um ciclo é um caminho que começa e termina no mesmo nó

# Ciclos

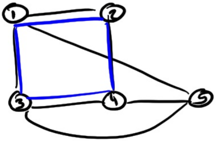
Informalmente, um ciclo é um caminho que começa e termina no mesmo nó

## Definição (Ciclo)

*Um **ciclo** é um passeio* $W = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_k v_{k+1}$ *onde:*

*(i) Os nós iniciais e finais são os mesmos:* $v_1 = v_{k+1}$

*(ii) Todos os outros nós são distintos (*$v_i \neq v_j$ *pra todo* $i < j$ *diferente de* $i = 1, j = k + 1$*) e todas as arestas são distintas*




1-2-3-4-1 é ciclo

1-2-1 não é ciclo

### Proposição

*Seja $G$ um grafo simples onde todos os nós tem grau pelo menos 2. Então $G$ tem um ciclo*

## Proposição

*Seja $G$ um grafo simples onde todos os nós tem grau pelo menos 2. Então $G$ tem um ciclo*

**Prova:** Considere o maior caminho $P = v_1 v_2 \dots v_k$ no grafo

Proposição

*Seja G um grafo simples onde todos os nós tem grau pelo menos 2. Então G tem um ciclo*

**Prova:** Considere o maior caminho $P = v_1 v_2 \dots v_k$ no grafo

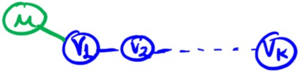

Como $v_1$ tem grau pelo menos 2, ele tem outro vizinho $u$ além de $v_2$

## Proposição

*Seja $G$ um grafo simples onde todos os nós tem grau pelo menos 2. Então $G$ tem um ciclo*

**Prova:** Considere o maior caminho $P = v_1 v_2 \dots v_k$ no grafo

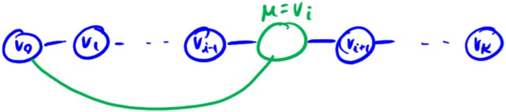

Como $v_1$ tem grau pelo menos 2, ele tem outro vizinho $u$ além de $v_2$




Esse vizinho não pode estar fora do caminho $P$, senão
$u \to v_1 \to \dots \to v_k$ seria um caminho mais longo que $P$

# Ciclo

Então $u$ está no caminho $P$: $u = v_i$ para algum $v_i \in P$




$\Rightarrow$ temos ciclo $v_1 v_2 \ldots v_i v_1$ ∎

# Exercícios

**Exercício 1:** Considere um grafo $G$. Prove que se $G$ tem um **passeio que começa e termina no mesmo nó** (passeio fechado), então ele tem um **ciclo**.

# Exercícios

**Exercício 2:** Considere um grafo $G$. Prove que se existem dois nós $u, v$ tal que existem **2 caminhos distintos** de $u$ a $v$ no grafo, então ele tem um **ciclo**.

# Árvores

# Árvores

**Definição (Árvore)**

*Uma* ***árvore*** *é um grafo conexo e sem ciclos (acíclico)*

# Árvores

**Theorem**

*Sejam $u$ e $v$ dois vértices distintos de uma árvore $T$. Existe exatamente um caminho entre $u$ e $v$ em $T$.*

**Exemplo:**

**Theorem**

*Sejam $u$ e $v$ dois vértices distintos de uma árvore $T$. Então exatamente um caminho entre $u$ e $v$ em $T$.*

**Prova:**

Tem $\geq 1$ caminho entre $u$ e $v$, pois é grafo conexo

# Árvores

**Theorem**

*Sejam $u$ e $v$ dois vértices distintos de uma árvore $T$. Então exatamente um caminho entre $u$ e $v$ em $T$.*

**Prova:**

Tem $\geq 1$ caminho entre $u$ e $v$, pois é grafo conexo

Tem $\leq 1$ caminho um caminho entre $u$ e $v$:

# Árvores

**Theorem**

*Sejam $u$ e $v$ dois vértices distintos de uma árvore $T$. Então exatamente um caminho entre $u$ e $v$ em $T$.*

**Prova:**

Tem $\geq 1$ caminho entre $u$ e $v$, pois é grafo conexo

Tem $\leq 1$ caminho um caminho entre $u$ e $v$:

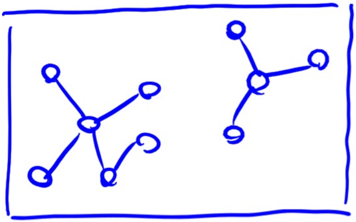
– Se tivéssemos dois caminhos entre $u$ e $v$ teríamos um ciclo (pelo exercício anterior)

– Não é possível, árvores não tem ciclo por definição

# Árvores

## Definição (Floresta)

*Uma floresta é um grafo $G$ em que todos os componentes conexos são árvores*
*(ou seja, é uma união de árvores disjuntas)*



$= G$

$\equiv$ grafo sem ciclo

# Árvores

## Proposição

*Seja $T$ uma árvore e seja $(u, v)$ uma aresta de $T$. O grafo $T - (u, v)$ (removendo aresta $(u, v)$) é uma floresta com dois componentes conexos, um contendo o nó $v$ e outro contendo o nó $u$*

**Exemplo:**

## Proposição

*Seja $T$ uma árvore e seja $(u, v)$ uma aresta de $T$. O grafo $T - (u, v)$ (removendo aresta $(u, v)$) é uma floresta com dois componentes conexos, um contendo o nó $v$ e outro contendo o nó $u$*

**Prova:** 1) Não existe caminho entre $u$ e $v$ em $T - (u, v)$, e portanto esses nós estão em componentes conexos diferentes:

Pela proposição anterior, só tem um caminho entre $u$ e $v$ em $T$, então tem que ser o caminho "direto" que só usa aresta $(u, v) \Rightarrow$ esse único caminho desapareceu em $T - (u, v)$

# Árvores

2) Não tem mais do que 2 componentes conexos em $T - (u, v)$, pois tem no máximo um comp. conexo a mais que $T$:

Mencionamos na ultima aula que remover uma aresta aumenta o número de componentes conexos em no máximo 1

Ótimo exercício provar isso formalmente

Teorema

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então* $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

**Exemplo:**

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$*

**Prova:** Indução forte no

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$*

**Prova:** Indução forte no número de arestas

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então #arestas($T$) = #nós($T$) −1*

**Prova:** Indução forte no número de arestas

**Caso base:** 0 arestas. Então $G$ tem exatamente nó(s),

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$*

**Prova:** Indução forte no número de arestas

**Caso base:** 0 arestas. Então $G$ tem exatamente 1 nó(s),

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$*

**Prova:** Indução forte no número de arestas

**Caso base:** 0 arestas. Então $G$ tem exatamente 1 nó(s), e temos #arestas = #nós −1, OK!

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$*

**Prova:** Indução forte no número de arestas

**Caso base:** 0 arestas. Então $G$ tem exatamente 1 nó(s), e temos $\#\text{arestas} = \#\text{nós} - 1$, OK!

**Passo indutivo:** Suponha que o resultado valha para todas as árvores com $1, 2, \ldots, m$ arestas

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então #arestas($T$) = #nós($T$) −1*

**Prova:** Indução forte no número de arestas

**Caso base:** 0 arestas. Então $G$ tem exatamente 1 nó(s), e temos #arestas = #nós −1, OK!

**Passo indutivo:** Suponha que o resultado valha para todas as árvores com $1, 2, \ldots, m$ arestas

Vamos provar pra árvore com $m + 1$ arestas

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$*

Seja $T$ uma árvore com $m + 1$ arestas.

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$*

Seja $T$ uma árvore com $m + 1$ arestas.

**Q:** Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então #arestas($T$) = #nós($T$) −1*

Seja $T$ uma árvore com $m + 1$ arestas.

**Q:** Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

**A:** Remova uma aresta $(u, v)$ qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores $T_u$ e $T_v$ (contendo $u$ e $v$ respectivamente)

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$*

Seja $T$ uma árvore com $m + 1$ arestas.

**Q:** Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

**A:** Remova uma aresta $(u, v)$ qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores $T_u$ e $T_v$ (contendo $u$ e $v$ respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o #arestas e #nós de $T$ com as novas árvores:

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então #arestas(T) = #nós(T) −1*

Seja $T$ uma árvore com $m + 1$ arestas.

**Q:** Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

**A:** Remova uma aresta $(u, v)$ qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores $T_u$ e $T_v$ (contendo $u$ e $v$ respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o #arestas e #nós de $T$ com as novas árvores:

#arestas($T$)

$\square$

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então #arestas(T) = #nós(T) −1*

Seja $T$ uma árvore com $m+1$ arestas.

**Q:** Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

**A:** Remova uma aresta $(u, v)$ qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores $T_u$ e $T_v$ (contendo $u$ e $v$ respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o #arestas e #nós de $T$ com as novas árvores:

$$\#\text{arestas}(T) = \#\text{arestas}(T_u) + \#\text{arestas}(T_v) + 1$$

$\square$

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então #arestas(T) = #nós(T) −1*

Seja $T$ uma árvore com $m+1$ arestas.

**Q:** Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

**A:** Remova uma aresta $(u, v)$ qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores $T_u$ e $T_v$ (contendo $u$ e $v$ respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o #arestas e #nós de $T$ com as novas árvores:

$$\begin{aligned}\#\text{arestas}(T) &= \#\text{arestas}(T_u) + \#\text{arestas}(T_v) + 1 \\ &= \Big(\#\text{nós}(T_u) - 1\Big) + \Big(\#\text{nós}(T_v) - 1\Big) + 1 \qquad \text{(hip indut)}\end{aligned}$$

$\square$

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$*

Seja $T$ uma árvore com $m+1$ arestas.

**Q:** Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

**A:** Remova uma aresta $(u, v)$ qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores $T_u$ e $T_v$ (contendo $u$ e $v$ respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o #arestas e #nós de $T$ com as novas árvores:

$$
\begin{aligned}
\#\text{arestas}(T) &= \#\text{arestas}(T_u) + \#\text{arestas}(T_v) + 1 \\
&= \Big(\#\text{nós}(T_u) - 1\Big) + \Big(\#\text{nós}(T_v) - 1\Big) + 1 \qquad \text{(hip indut)} \\
&= \#\text{nós}(T) - 1 - 1 + 1
\end{aligned}
$$

□

**Teorema**

*Se $T$ é uma árvore não vazia, então #arestas($T$) = #nós($T$) −1*

Seja $T$ uma árvore com $m+1$ arestas.

**Q:** Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

**A:** Remova uma aresta $(u, v)$ qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores $T_u$ e $T_v$ (contendo $u$ e $v$ respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o #arestas e #nós de $T$ com as novas árvores:

$$\begin{aligned}
\#\text{arestas}(T) &= \#\text{arestas}(T_u) + \#\text{arestas}(T_v) + 1 \\
&= \Big(\#\text{nós}(T_u) - 1\Big) + \Big(\#\text{nós}(T_v) - 1\Big) + 1 \qquad \text{(hip indut)} \\
&= \#\text{nós}(T) - 1 - 1 + 1 \\
&= \#\text{nós}(T) - 1 \qquad \square
\end{aligned}$$

# Exercícios

**Exercício 1:** Uma **folha** de uma árvore é um nó de grau $\leq 1$. Prove que toda árvore $T$ não vazia tem pelo menos uma folha

Dicas:
i) Use uma proposição que provamos sobre existência de ciclos
ii) Use contradição

**Obs:** Folhas são muito importantes para fazer prova por indução no número de nós de uma árvore, pois removendo uma folha obtemos uma árvore com 1 nó a menos