

Estruturas Discretas

Marco Molinaro

- 1 Conceitos Básicos para Demonstrações
 - Teorema
 - Proposição
 - Definições
- 2 Quantificadores
- 3 Exercícios

Conceitos Básicos para Demonstrações

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Porque?

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Porque?

Raciocinar de forma precisa/sem ambiguidades

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Porque?

Raciocinar de forma precisa/sem ambiguidades

Certificar que determinado algoritmo **realmente funciona**

- Algoritmos de criptografia
- Algoritmos de ordenacao
- Algoritmos de caminho mais curto (*)
- ...

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Porque?

Raciocinar de forma precisa/sem ambiguidades

Certificar que determinado algoritmo **realmente funciona**

- Algoritmos de criptografia
- Algoritmos de ordenação
- Algoritmos de caminho mais curto (*)
- ...

(Em *Análise de Algoritmos* utilizaremos para analisar o **quão “rápido”** é um algoritmo)

- O primeiro passo para a resolução de um problema é defini-lo correta e precisamente. A **formulação** do problema envolve as seguintes questões:
 - ▶ *Qual o objeto (ou quais os objetos) em análise?*
 - ▶ *O que se deseja provar?*

- O primeiro passo para a resolução de um problema é defini-lo correta e precisamente. A **formulação** do problema envolve as seguintes questões:
 - ▶ *Qual o objeto (ou quais os objetos) em análise?*
 - ▶ *O que se deseja provar?*
- Hoje focaremos precisamente em como **formular** problemas
- (Na próxima aula falaremos de *demonstrações*)

- **Teorema:** resultado **verdadeiro** e provado

- **Teorema:** resultado **verdadeiro** e provado
- Um teorema é dividido em duas partes:
 - ▶ **Hipótese:** Apresenta as **informações** sobre o objeto de prova, o que **assumimos**. Essas informações são tomadas como verdadeiras
 - ▶ **Tese:** É a parte do teorema que **desejamos validar**, a partir da hipótese, utilizando uma sequência de argumentos formais.

Hipótese \Rightarrow Tese

Teorema

Ex:

Teorema

Seja n um número inteiro primo maior que 2. Então n é ímpar.

Hipotese *Tese*

Teorema

Ex:

Teorema

Seja n um número inteiro primo maior que 2. Então n é ímpar.

Hipotese *Tese*

Teorema

Seja n um número inteiro. Se a soma dos dígitos de n é divisível por 3,

Hipotese

então n é divisível por 3

Tese

Teorema

Obs: Geralmente a hipótese é dada de forma **implícita**

Ex:

Teorema

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

Obs: Geralmente a hipótese é dada de forma **implícita**

Ex:

Teorema

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

(*Hipótese:* o objeto da prova é um triângulo; *Tese:* a soma de seus ângulos é 180 graus)

FYI: **Lema** e **Corolário** são Basicamente a mesma coisa que **Teorema**

(essas distinções não são importantes para nós)

Proposição

- Uma **proposição** pode ser **falsa ou verdadeira**. Caso seja encontrada uma prova, ela se tornara um teorema

Proposição

- Uma **proposição** pode ser **falsa ou verdadeira**. Caso seja encontrada uma prova, ela se tornara um teorema

Proposição

Tudo numero múltiplo de 4 é múltiplo de 3

Proposição

Existem infinitas de triplas de naturais (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 = z^2$

Proposição

O algoritmo Heapsort realiza no máximo $5n \log n$ comparações para ordenar uma lista de n números

Definições

- **Definição** é a enumeração das propriedades de um determinado objeto (ou coleção de objetos)

Definição (Primo)

Um natural p é **primo** se e somente se

Objeto

for divisível por exatamente dois números inteiros: 1 e p .

Propriedades

Definições

- **Definição** é a enumeração das propriedades de um determinado objeto (ou coleção de objetos)

Definição (Primo)

Um natural p é **primo** se e somente se

Objeto

for divisível por exatamente dois números inteiros: 1 e p .

Propriedades

Definição (Módulo)

O **módulo** $|r|$ de um número real r é igual a r se $r \geq 0$, e igual a $-r$ se $r < 0$

Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.

Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.
- As vezes o mesmo objeto recebe duas **diferentes definições**. Quando isso ocorre, é **necessário provar** que as definições **se equivalem**.

Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.
- As vezes o mesmo objeto recebe duas **diferentes definições**. Quando isso ocorre, é **necessário provar** que as definições **se equivalem**.

Ex:

Definição

*Uma **árvore** é um grafo conexo cujo número de arestas é igual ao número de nós menos 1*

Definição

*Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos*

Quantificadores

Pergunta: O seguinte teorema é “interessante”? **Porque** nao/sim?

Teorema

O número 5 é primo.

Pergunta: O seguinte teorema é “interessante”? **Porque** nao/sim?

Teorema

O número 5 é primo.

Não é muito interessante: fala apenas de **um número específico**

Para falarmos de **múltiplos** objetos, precisamos de **quantificadores**

Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador “**todo**” é representado por \forall , e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador “**existe**” é denotado por \exists

Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador “**todo**” é representado por \forall , e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador “**existe**” é denotado por \exists

- **Obs:** Geralmente utilizamos quantificadores para elementos dentro de uma **coleção específica** de objetos
- **Ex:** “*para todo número inteiro ...*”; “*existe uma função ...*”

Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador “**todo**” é representado por \forall , e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador “**existe**” é denotado por \exists

- **Obs:** Geralmente utilizamos quantificadores para elementos dentro de uma **coleção específica** de objetos
- **Ex:** “*para todo número inteiro ...*”; “*existe uma função ...*”

Proposição

Todo número primo maior do que 2 é ímpar

Proposição

Para todo número par n , existe número natural k tal que $n = 2k$

Negação: Frequentemente precisamos encontrar a **negação** de uma proposição (utilizamos “ \neg ” para denotar negação)

Todo mundo gosta de sorvete $\xrightarrow{\text{negação}}$ Nem todo mundo gosta de sorvete
Tem gente que não gosta de sorvete

Fundamental entender como negação interage com quantificadores, **E**, **OU**, **implica**

Negação do “E”:

Marco é jovem **E** bonito $\xRightarrow{\text{negação}}$ Não é verdade que Marco é ambos jovem **E** bonito
Marco é velho **OU** feio

Negação do “E”:

Marco é jovem **E** bonito $\xRightarrow{\text{negação}}$ Não é verdade que Marco é ambos jovem **E** bonito
Marco é velho **OU** feio

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \mathbf{E} B \xRightarrow{\text{negação}}$$

Negação do “E”:

Marco é jovem **E** bonito $\xRightarrow{\text{negação}}$ Não é verdade que Marco é ambos jovem **E** bonito
Marco é velho **OU** feio

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \mathbf{E} B \xRightarrow{\text{negação}} (\neg A) \mathbf{OU} (\neg B)$$

Negação do “OU”:

Hoje é terça **O**U quarta $\xrightarrow{\text{negação}}$ Não é verdade que hoje é terça ou quarta
Hoje não é terça **E** não é quarta

Negação do “OU”:

Hoje é terça **O**U quarta $\xRightarrow{\text{negação}}$ Não é verdade que hoje é terça ou quarta
Hoje não é terça **E** não é quarta

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \text{ OU } B \xRightarrow{\text{negação}}$$

Negação do “OU”:

Hoje é terça **OU** quarta $\xRightarrow{\text{negação}}$ Não é verdade que hoje é terça ou quarta
Hoje não é terça **E** não é quarta

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \text{ OU } B \xRightarrow{\text{negação}} (\neg A) \text{ E } (\neg B)$$

Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete $\xRightarrow{\text{negação}}$ Nem todo mundo gosta de sorvete
Tem gente que não gosta de sorvete

Negação

Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete $\xRightarrow{\text{negação}}$ Nem todo mundo gosta de sorvete
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n , n é par $\xRightarrow{\text{negação}}$

Negação

Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete $\xRightarrow{\text{negação}}$ Nem todo mundo gosta de sorvete
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n , n é par $\xRightarrow{\text{negação}}$ Existe inteiro n que não é par

Negação

Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete $\xRightarrow{\text{negação}}$ Nem todo mundo gosta de sorvete
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n , n é par $\xRightarrow{\text{negação}}$ Existe inteiro n que não é par

Casos particulares da regra geral:

$$\forall x, \text{expressao}(x) \xRightarrow{\text{negação}}$$

Negação

Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete $\xRightarrow{\text{negação}}$ Nem todo mundo gosta de sorvete
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n , n é par $\xRightarrow{\text{negação}}$ Existe inteiro n que não é par

Casos particulares da regra geral:

$$\forall x, \text{expressao}(x) \xRightarrow{\text{negação}} \exists x, \neg \text{expressao}(x)$$

Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete $\xrightarrow{\text{negação}}$ Nem todo mundo gosta de sorvete
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n , n é par $\xrightarrow{\text{negação}}$ Existe inteiro n que não é par

Casos particulares da regra geral:

$$\forall x, \text{expressao}(x) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, \neg \text{expressao}(x)$$

Porque? “Para todo” é simplesmente um **E** gigantesco e
“Existe” é simplesmente um **OU** gigantesco

Negação do “Existe”:

Existem pessoas com > 3 metros $\xRightarrow{\text{negação}}$ Não existem pessoas com > 3 metros
Todo mundo tem ≤ 3 metros

Negação do “Existe”:

Existem pessoas com > 3 metros $\xrightarrow{\text{negação}}$ Não existem pessoas com > 3 metros
Todo mundo tem ≤ 3 metros

Caso particular da regra geral:

$$\exists x, \text{expressao}(x) \xrightarrow{\text{negação}}$$

Negação do “Existe”:

Existem pessoas com > 3 metros $\xrightarrow{\text{negação}}$ Não existem pessoas com > 3 metros
Todo mundo tem ≤ 3 metros

Caso particular da regra geral:

$$\exists x, \text{expressao}(x) \xrightarrow{\text{negação}} \forall x, \neg \text{expressao}(x)$$

Negação do “Existe”:

Existem pessoas com > 3 metros $\xrightarrow{\text{negação}}$ Não existem pessoas com > 3 metros
Todo mundo tem ≤ 3 metros

Caso particular da regra geral:

$$\exists x, \text{expressao}(x) \xrightarrow{\text{negação}} \forall x, \neg \text{expressao}(x)$$

Porque? “Para todo” é simplesmente um **E** gigantesco e
“Existe” é simplesmente um **OU** gigantesco

Negação

Importante: Note que as **classes dos objetos** não mudam, só os quantificadores

Para todo número par n , n é divisível por 3

Negação

Importante: Note que as **classes dos objetos** não mudam, só os quantificadores

Para todo número par n , n é divisível por 3

negação
 \implies

Existe número par n que **não é** divisível por 3

Negação

Importante: Note que as **classes dos objetos** não mudam, só os quantificadores

Para todo número par n , n é divisível por 3

negação
 \implies

Existe número par n que **não é** divisível por 3

Porque? Novamente, é um grande **OU** ou **E**

2 é div por 3 **E** 4 é div por 3 **E**
6 é div por 3 **E** 8 é div por 3 ...

negação
 \implies

2 **não é** div por 3 **OU** 4 **não é** div por 3 **OU** 6 **não é** div por 3 **OU** 8 **não é** div por 3 ...

Negação

Importante: Note que as **classes dos objetos** não mudam, só os quantificadores

Para todo número par n , n é divisível por 3

negação
 \implies

Existe número par n que **não** é divisível por 3

Porque? Novamente, é um grande **OU** ou **E**

2 é div por 3 **E** 4 é div por 3 **E**
6 é div por 3 **E** 8 é div por 3 ...

negação
 \implies

2 **não** é div por 3 **OU** 4 **não** é div por 3 **OU** 6 **não** é div por 3 **OU** 8 **não** é div por 3 ...

Exemplos:

① **Para todo** número real $x > 0$, $2x = x + 1$

negação
 \implies

Existe número real $x > 0$, $2x \neq x + 1$

② **Existe** número inteiro n tal que $n < 5n - 2$

negação
 \implies

Para todo número inteiro n , $n \geq 5n - 2$

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo numero par n , *existe* numero natural k tal que $n = 2k$

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo numero par n , **existe** numero natural k tal que $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe numero par n , tal que **pra todo** numero natural k , $n \neq 2k$

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo numero par n , **existe** numero natural k tal que $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe numero par n , tal que **pra todo** numero natural k , $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

① \neg [Para todo numero par n , existe numero natural k tal que $n = 2k$]

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo numero par n , **existe** numero natural k tal que $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe numero par n , tal que **pra todo** numero natural k , $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

- 1 \neg [**Para todo** numero par n , **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
- 2 **Existe** numero par n tal que \neg [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo numero par n , **existe** numero natural k tal que $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe numero par n , tal que **pra todo** numero natural k , $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

- 1 \neg [**Para todo** numero par n , **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
- 2 **Existe** numero par n tal que \neg [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
- 3 **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k , $\neg[n = 2k]$

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo numero par n , **existe** numero natural k tal que $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe numero par n , tal que **pra todo** numero natural k , $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

- 1 \neg [**Para todo** numero par n , **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
- 2 **Existe** numero par n tal que \neg [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
- 3 **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k , $\neg[n = 2k]$
- 4 **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k , $n \neq 2k$

Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

negação
→

Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$ Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}}$$

Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$ Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, expr_1(x) \mathbf{E} (\neg expr_2(x))$$

Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$ Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, expr_1(x) \mathbf{E} (\neg expr_2(x))$$

Pq? “Para todo + se” é só um “para todo” com universo restrito:

$$\forall x \text{ que satisfaz } expr_1(x), \text{ satisfaz } expr_2(x) \\ \xrightarrow{\text{negação}}$$

Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$ Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, expr_1(x) \mathbf{E} (\neg expr_2(x))$$

Pq? “Para todo + se” é só um “para todo” com universo restrito:

$$\forall x \text{ que satisfaz } expr_1(x), \text{ satisfaz } expr_2(x) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x \text{ que satisfaz } expr_1(x), \text{ satisfazendo } (\neg expr_2(x))$$

Porque negacao: Importante para **provar/desprovar** proposicao:
basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

Quantificadores

Porque negacao: Importante para **provar/desprovar** proposicao: basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

*Todo numero primo maior que 2 é **par***

Quantificadores

Porque negacao: Importante para **provar/desprovar** proposicao: basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

*Todo numero primo maior que 2 é **par***

Resposta: É **falsa**: 3 é primo maior que 2 e não é par

Quantificadores

Porque negacao: Importante para **provar/desprovar** proposicao: basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

*Todo numero primo maior que 2 é **par***

Resposta: É **falsa**: 3 é primo maior que 2 e não é par

O que voce acabou de mostrar é que a **negacao** da proposicao é **verdadeira** (entao a proposicao é **falsa**)

Quantificadores

Porque negacao: Importante para **provar/desprovar** proposicao: basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

*Todo numero primo maior que 2 é **par***

Resposta: É **falsa**: 3 é primo maior que 2 e não é par

O que voce acabou de mostrar é que a **negacao** da proposicao é **verdadeira** (entao a proposicao é **falsa**)

Proposição (negacao)

Existe** numero primo maior que 2 que é **impar

Exercícios

- **Exercício 1** - Seja I um intervalo, e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Reescreva as seguintes proposições utilizando quantificadores:
 - ① A função f atinge o valor zero
 - ② A função f é constante
 - ③ A função f não é constante (*sem usar negação*)

- **Exercício 2** - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Negue as seguintes proposições:
 - ❶ Para todo $x \in [0, \infty)$ temos $f(x) \neq 0$.
 - ❷ Existe $x \leq 10$ tal que $f(x) > 100$.
 - ❸ $\forall y > 0, \exists x > 0, f(x) > y$.

- **Exercício 3** - Negue as proposições abaixo:
 - ❶ Para todo número natural n , se n é par então n^2 é par
 - ❷ Para todo inteiro $n \geq 3$, se n é primo então n é ímpar

- **Exercício 4** - Determine se cada proposição é verdadeira ou falsa (\mathbb{R}^* denota o conjunto \mathbb{R} com o 0 excluído)

① $\exists a \in \mathbb{R}^*, \forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon$

② $\forall \epsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}^*, |a| < \epsilon$

③ $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$

④ $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$

⑤ $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$