

1. Encontre o menor inteiro n_0 para o qual $n! > 2^n$. Prove por indução que esta relação é válida para $n \geq n_0$.

1. Seja a equação de recorrência definida por

$$T(n) = T(n-1) + n, \text{ para } n \geq 2$$

$$T(1) = 1.$$

Prove por indução que $T(n) > n^2/2$

Caso base: $n=1$, $T(1) = 1 > \frac{1^2}{2} \checkmark$

Passo ind: Assume vale n . Quer $n+1$

$$T(n+1) > \frac{(n+1)^2}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{2} = \frac{n^2}{2} + n + \frac{1}{2}$$

$$T(n+1) = T(n) + (n+1)$$

$$> \frac{n^2}{2} + (n+1)$$

3)

MoveDisco(n,ini,dest)

Se $n = 1$

Retire o Disco D_1 de haste ini e coloque na haste $dest$

Fim Se

$x \leftarrow \{A, B, C\} - \{ini, dest\}$

MoveDisco(n-1,ini,x)

Retire o Disco D_n da haste ini e coloque na haste $dest$

MoveDisco(n-1,x,dest)

Prove por inducao que o número de discos “retirados” por MoveDisco(n, A, C) (ou seja, número de execuções das linhas 2 ou 5) é $2^n - 1$

2. Uma árvore estritamente binária é uma árvore binária em que todo nó tem 0 ou 2 filhos. Uma folha em uma árvore é um nó que não tem nenhum filho. O nível de uma folha em uma árvore binária é o número de arcos do caminho que começa na folha e termina na raiz. Para um melhor entendimento, a árvore estritamente binária mostrada na Figura 1 tem 3 folhas em níveis 2,2,1. Sejam l_1, l_2, \dots, l_n os níveis das folhas de uma árvore estritamente binária com n folhas. Prove que

$$\sum_{i=1}^n 2^{-l_i} = 1$$

6) Considere o algoritmo da busca binária

Bin(A, x)

n = |A|

If n = 0, return **False**

Defina a “metade” $m = \lfloor n/2 \rfloor$

Particione A nas listas $L = A[1:m-1]$ e $R = A[m+1:n]$

If $A[m] = x$

return **True**

Else if $A[m] < x$

return Bin(R, x)

Else

return Bin(L, x)

Prove que se A é um vetor de números ordenado, Bin(A,x) retorna “True” caso x pertença a A (por indução forte no tamanho de A).

1) a) Prove that every amount of postage of 12 cents or more can be formed using just 4-cent and 5-cent stamps.

b) Design a recursive algorithm that given an input x returns a number of 4-cent and 5-cent stamps whose total value is exactly x

2) Prove por indução que se n pessoas estão enfileiradas e a primeira pessoa é uma mulher e a última um homem, então em alguma posição da fila tem-se um homem logo em seguida de uma mulher

3) Escreva a negação das expressões abaixo:

a) Para todo número natural n, existe um número x tal que $n < x$

b) Toda árvore possui um nó folha

c) Para todo número natural n, se n é par então $n+1$ é ímpar

4) Prove o seguinte por contradição: Para todo par de números inteiros a, b temos $a^2 - 4b \neq 2$.

Dica: Lembre que provamos que se x^2 é par, então x é par.