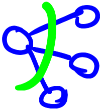
Grafos

-  adjacente/vizinho
-  grau = # vizinhos
- $\sum_{u \in V} \underbrace{d(u)}_{\text{grau}} = 2 \cdot \#\text{arestas}$

Caminhos, ciclos, e árvores

Caminhos

Definição (Passeio)

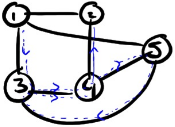
Um ***passeio*** *(walk) em um grafo G é uma sequência $W = v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots e_k v_{k+1}$, tal que as extremidades de e_i são v_i e v_{i+1} para todo $i = 1, \ldots, k$.*

ver arestas

Caminhos

Definição (Passeio)

*Um **passeio** (walk) em um grafo G é uma sequência $W = v_1 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_{k+1}$, tal que as extremidades de e_i são v_i e v_{i+1} para todo $i = 1, \ldots, k$.*



- Passeio

$W = 1 - 3 - 4 - 5 - 3 - 4 - 2$

pode ter repetição

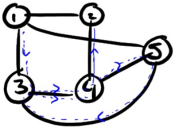
- Outro passeio

$4 - 2 - 1 - 3 - 4$

Caminhos

Definição (Passeio)

*Um **passeio** (walk) em um grafo G é uma sequência $W = v_1 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_{k+1}$, tal que as extremidades de e_i são v_i e v_{i+1} para todo $i = 1, \dots, k$.*



· Passeio

$W =$ 1 – 3 – 4 – 5 – 3 – 4 – 2

pode ter repetiçõs

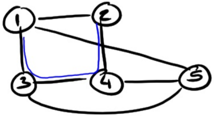
· Outro passeio

4 – 2 – 1 – 3 – 4

Obs: Em um grafo simples não é necessário indicar as arestas de W, pois par de vértices identifica de forma única uma aresta

Definição (Caminho)

Um ***caminho*** *é um passeio onde todos os vértices são distintos* (arestas tb não distintas)



1 – 3 – 4 – 2 é caminho

1 – 3 – 4 – 5 – 3 – 4 – 2

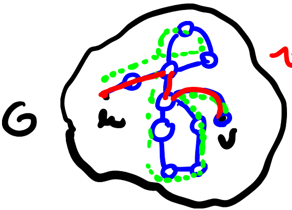
não é caminho

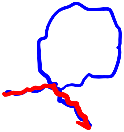
repetições

Pergunta: Se existe um passeio de u para v, então existe um caminho de u pra v?

azul: passeio

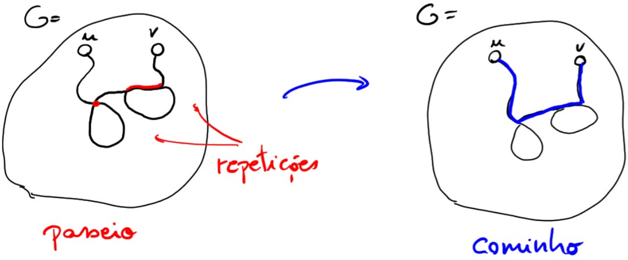
vermelho: caminho





Pergunta: Se existe um passeio de u para v, então existe um caminho de u pra v?

Sim: Podemos começar com passeio (que tem repetição de nós) e "cortar caminho", removendo repetições



Se um grafo tem “muitas arestas”, deve ter tambem um caminho grande

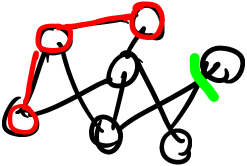
Se um grafo tem “muitas arestas”, deve ter tambem um caminho grande

O próximo lema faz isso formal

Proposição

Considere um grafo simples G. *Suponha que o grau de todos os nós em* G *é pelo menos* k. *Então* G *possui um caminho com* $\geq k+1$ *nós*

Ex:

$G =$ 

$k = 2$

$G =$ 

Proposição

Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho com $\geq k+1$ nós

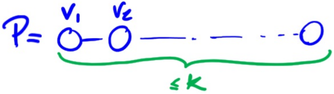
Prova: Suponha por por contradição que mesmo o maior caminho em G tem $\leq k$ nós

Proposição

Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho com $\geq k+1$ nós

Prova: Suponha por por contradição que mesmo o maior caminho em G tem $\leq k$ nós

Chame esse maior caminho de $P = v_1 v_2 \dots v_p$

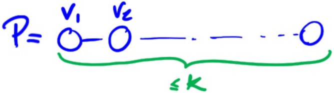


Proposição

Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho com $\geq k+1$ nós

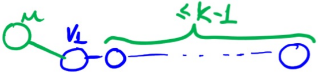
Prova: Suponha por por contradição que mesmo o maior caminho em G tem $\leq k$ nós

Chame esse maior caminho de $P = v_1 v_2 \dots v_p$



Considere o primeiro nó $v_1 \in P$. Como P tem no máximo $\leq k-1$ outros nós além de v_1...

...mas v_1 tem $\geq k$ vizinhos, então v_1 tem vizinho u fora de P

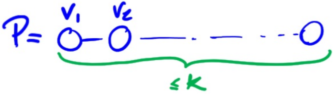


Proposição

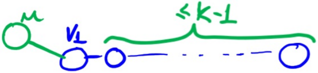
Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho com $\geq k+1$ nós

Prova: Suponha por por contradição que mesmo o maior caminho em G tem $\leq k$ nós

Chame esse maior caminho de $P = v_1 v_2 \ldots v_p$



Considere o primeiro nó $v_1 \in P$. Como P tem no máximo $\leq k-1$ outros nós além de v_1...
...mas v_1 tem $\geq k$ vizinhos, então v_1 tem vizinho u fora de P



Então encontramos caminho maior que P: $u \to v_1 \to v_2 \ldots \to v_p$.
Isso contradiz que P é maior caminho

Conectividade

Definição (Conectividade)

*Um grafo é **conexo/conectado** se pra todo par de nós u e v, existe um caminho no grafo entre u e v*

Conectividade

Definição (Conectividade)

Um grafo é ***conexo/conectado*** *se pra todo par de nós u e v, existe um caminho no grafo entre u e v*

Pergunta: Se G é conexo e adicionamos uma aresta, o que acontece? E se removemos uma aresta?

Componentes conexos

Os componentes conexos são os "blocos conexos" do grafo

Definição

Considere um grafo G. Os componentes conexos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ são uma partição dos nós de G tal que:

(i) ***Cada C_i é conexo:*** *Se u, v pertencem a um mesmo conjunto C_i, então tem caminho em G entre eles*

(ii) ***Os C_i's são separados:*** *Se u, v pertencem a conjuntos diferentes, então não tem caminho entre eles*

Componentes conexos

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?
Resp: G conexo $\Leftrightarrow$ tem exatamente 1 componente conexo

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?
Resp: G conexo $\Leftrightarrow$ tem exatamente 1 componente conexo

Pergunta: Considere um nó em um componente conexo de um grafo. Para onde estão indo suas arestas?

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?
Resp: G conexo $\Leftrightarrow$ tem exatamente 1 componente conexo

Pergunta: Considere um nó em um componente conexo de um grafo. Para onde estão indo suas arestas?

Resp: Para nós no mesmo componente conexo

Exercicios

Exercício 1: Prove se existe ou não um grafo com n nós tal que:

O maior caminho tem tamanho (número de arestas) $n - 1$

O maior caminho tem tamanho n?

O maior caminho tem tamanho 2?

O maior caminho tem tamanho 1?

Exercício 2: O que acontece ao número de componentes conexos de G quando adicionamos uma aresta? E quando removemos uma aresta?

Exercício 3:* Considere um grafo **simples** com n nós. Prove que se todos os nós tem grau $\geq \frac{n}{2}$, então o grafo é conexo

Dica: Por contradição, assuma que não é conexo, e portanto tem mais de 1 componente conexo. Olhe para um nó no menor componente conexo; para onde estão indo suas $\geq \frac{n}{2}$ arestas?