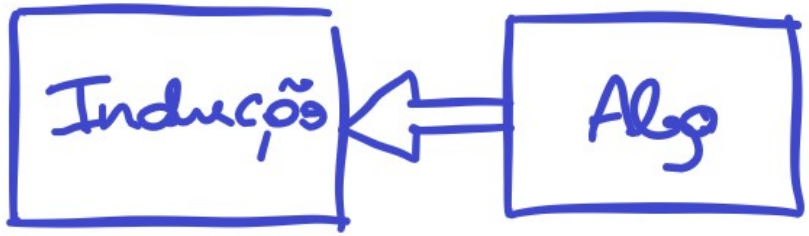
Inducao para desenho de algoritmos

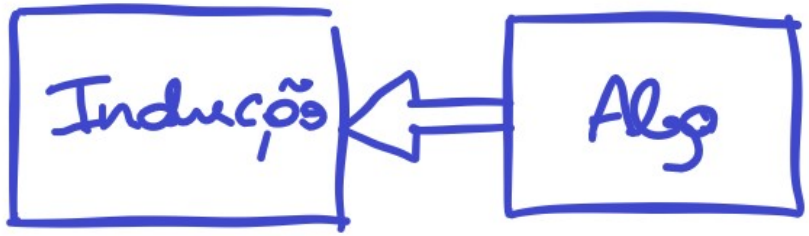
Inducao para desenho de algoritmos

Mostramos como provar corretude de algoritmos usando indução

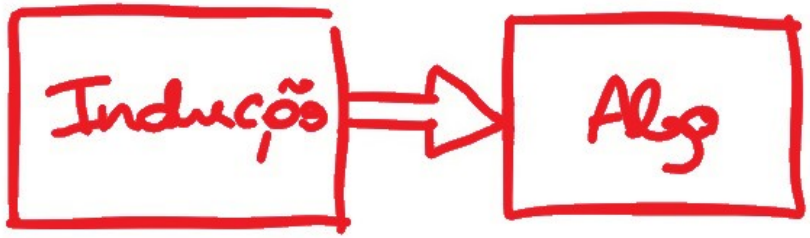


Inducao para desenho de algoritmos

Mostramos como provar corretude de algoritmos usando indução



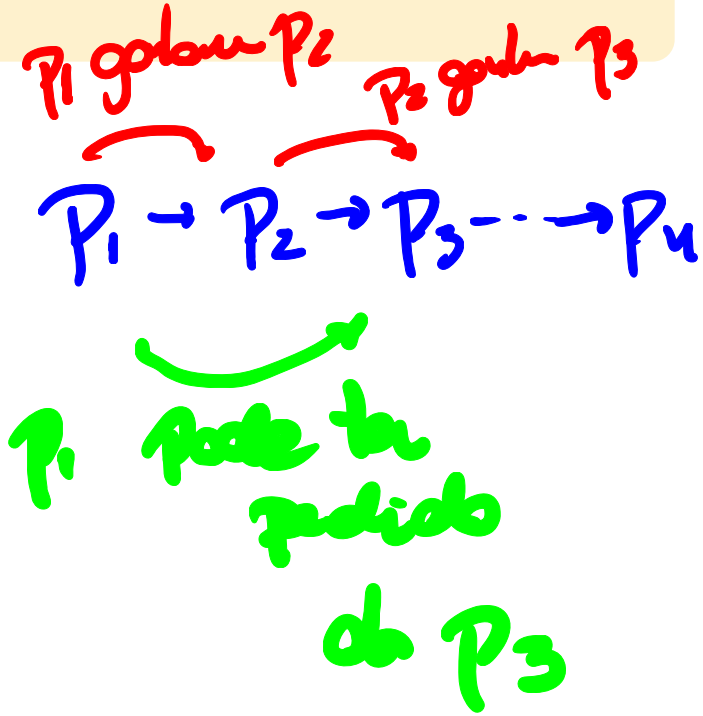
Agora veremos como usar indução para desenhar algoritmos



Inducao para desenho de algoritmos

Proposição

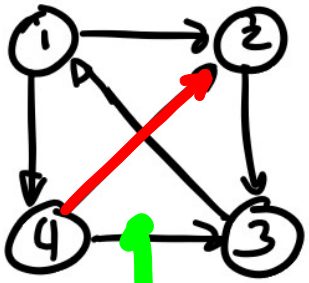
Ao final de qualquer campeonato em que todos os $n \geq 2$ *participantes jogaram entre si, é possível, independentemente dos resultados, ordenar os participantes como* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *de forma que, para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, p_i *vence* p_{i+1}



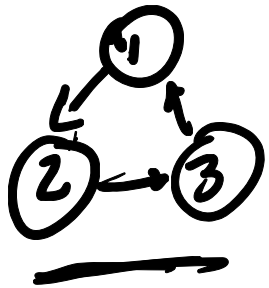
Inducao para desenho de algoritmos

Proposição

Ao final de qualquer campeonato em que todos os $n \geq 2$ *participantes jogaram entre si, é possível, independentemente dos resultados, ordenar os participantes como* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *de forma que, para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, p_i *vence* p_{i+1}



4 ganha de 1



Inducao para desenho de algoritmos

Proposição

Ao final de qualquer campeonato em que todos os $n \geq 2$ *participantes jogaram entre si, é possível, independentemente dos resultados, ordenar os participantes como* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *de forma que, para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, p_i *vence* p_{i+1}

Vamos primeiro provar isso por indução fraca no número de jogadores

Inducao para desenho de algoritmos

Proposição

Ao final de qualquer campeonato em que todos os $n \geq 2$ participantes jogaram entre si, é possível, independentemente dos resultados, ordenar os participantes como $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de forma que, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, p_i vence p_{i+1}

Vamos primeiro provar isso por indução fraca no número de jogadores

Prova: Caso base: $n = 2$. Caso Jogador 1 ganhou do Jogador 2 usamos a ordem

$$\text{Jogador } 1 \to \text{Jogador } 2;$$

caso contrário usamos

$$\text{Jogador } 2 \to \text{Jogador } 1$$

Inducao para desenho de algoritmos

Passo indutivo. Seja $n \geq 2$, suponha que propriedade valha para n. Precisamos provar que vale para $n + 1$

Inducao para desenho de algoritmos

Passo indutivo. Seja $n \geq 2$, suponha que propriedade valha para n. Precisamos provar que vale para $n + 1$

Considere $n + 1$ jogadores e o resultado dos seus jogos

Inducao para desenho de algoritmos

Passo indutivo. Seja $n \geq 2$, suponha que propriedade valha para n. Precisamos provar que vale para $n + 1$

Considere $n + 1$ jogadores e o resultado dos seus jogos

Pegue um jogador p^* e retire ele do conjunto.

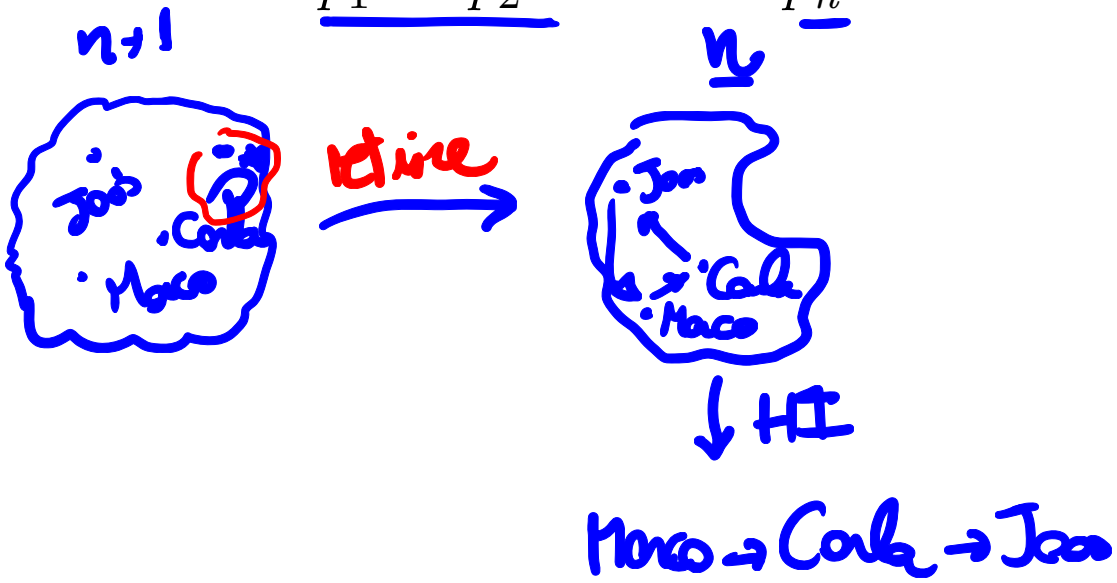
Inducao para desenho de algoritmos

Passo indutivo. Seja $n \geq 2$, suponha que propriedade valha para n. Precisamos provar que vale para $n + 1$

Considere $n + 1$ jogadores e o resultado dos seus jogos

Pegue um jogador p^* e retire ele do conjunto. Podemos usar a **hipótese indutiva** nos n jogadores (e seus jogos) restantes para obter uma ordem

$$p_1 \to p_2 \to \ldots \to p_n$$



Inducao para desenho de algoritmos

Passo indutivo. Seja $n \geq 2$, suponha que propriedade valha para n. Precisamos provar que vale para $n + 1$

Considere $n + 1$ jogadores e o resultado dos seus jogos

Pegue um jogador p^* e retire ele do conjunto. Podemos usar a **hipótese indutiva** nos n jogadores (e seus jogos) restantes para obter uma ordem

$$p_1 \to p_2 \to \ldots \to p_n$$

Aonde inserir p^* nessa ordem?

Inducao para desenho de algoritmos

Passo indutivo. Seja $n \geq 2$, suponha que propriedade valha para n. Precisamos provar que vale para $n + 1$

Considere $n + 1$ jogadores e o resultado dos seus jogos

Pegue um jogador p^* e retire ele do conjunto. Podemos usar a **hipótese indutiva** nos n jogadores (e seus jogos) restantes para obter uma ordem

$$p_1 \to p_2 \to \ldots \to p_n \to p^*$$

Caso 1: p^* perdeu todos os jogos

Inducao para desenho de algoritmos

Passo indutivo. Seja $n \geq 2$, suponha que propriedade valha para n. Precisamos provar que vale para $n + 1$

Considere $n + 1$ jogadores e o resultado dos seus jogos

Pegue um jogador p^* e retire ele do conjunto. Podemos usar a **hipótese indutiva** nos n jogadores (e seus jogos) restantes para obter uma ordem

$$p_1 \to p_2 \to \ldots \to p_n$$

Caso 1: p^* perdeu todos os jogos, coloque no fim:

$$p_1 \to \ldots \to p_n \to p^*$$

Inducao para desenho de algoritmos

Passo indutivo. Seja $n \geq 2$, suponha que propriedade valha para n. Precisamos provar que vale para $n + 1$

Considere $n + 1$ jogadores e o resultado dos seus jogos

Pegue um jogador p^* e retire ele do conjunto. Podemos usar a **hipótese indutiva** nos n jogadores (e seus jogos) restantes para obter uma ordem

$$p_1 \to p_2 \to \ldots \to p_n$$

Caso 1: p^* perdeu todos os jogos, coloque no fim:

$$p_1 \to \ldots \to p_n \to p^*$$

Caso 2: Caso contrário, seja p_i o primeiro jogador tal que p^* ganhou de p_i

Inducao para desenho de algoritmos

Passo indutivo. Seja $n \geq 2$, suponha que propriedade valha para n. Precisamos provar que vale para $n+1$

Considere $n+1$ jogadores e o resultado dos seus jogos

Pegue um jogador p^* e retire ele do conjunto. Podemos usar a **hipótese indutiva** nos n jogadores (e seus jogos) restantes para obter uma ordem

$$p_1 \to p_2 \to \ldots \to p_n$$

Caso 1: p^* perdeu todos os jogos, coloque no fim:

$$p_1 \to \ldots \to p_n \to p^*$$

Caso 2: Caso contrário, seja p_i o primeiro jogador tal que p^* ganhou de p_i

Coloque p^* logo antes de p_i:

$$p_1 \to \ldots \to p_{i-1} \to p^* \to p_i \to \ldots \to p_n$$

Inducao para desenho de algoritmos

Note que p^* está numa posição válida: o anterior ganhou dele e ele ganhou do próximo

Inducao para desenho de algoritmos

Note que p^* está numa posição válida: o anterior ganhou dele e ele ganhou do próximo

Por definição p^* ganhou de p_i

Inducao para desenho de algoritmos

Note que p^* está numa posição válida: o anterior ganhou dele e ele ganhou do próximo

Por definição p^* ganhou de p_i

E se $i > 1$, então p^* perdeu de p_{i-1}: caso contrário i não seria o menor índice tal que p^* ganhou de i

Inducao para desenho de algoritmos

Note que p^* está numa posição válida: o anterior ganhou dele e ele ganhou do próximo

Por definição p^* ganhou de p_i

E se $i > 1$, então p^* perdeu de p_{i-1}: caso contrário i não seria o menor índice tal que p^* ganhou de i

(Note que se $i = 1$ então p^* é o primeiro na ordem, e não precisamos mostrar que perdeu do anterior)

Inducao para desenho de algoritmos

Q: Baseado nessa prova, qual seria um algoritmo para criar essa ordem, dado n jogadores e seus jogos?

Inducao para desenho de algoritmos

Q: Baseado nessa prova, qual seria um algoritmo para criar essa ordem, dado n jogadores e seus jogos?

(Imaginamos que cada jogador é uma estrutura que guarda de quem ele ganhou e quem ganhou dele)

Inducao para desenho de algoritmos

Função Torneio($J_1, J_2, \ldots, J_n$) # conjunto de n jogadores
    If $n = 2$
        If J_1 **ganhou de** J_2
            Return sequencia J_1, J_2
        Else
            Return sequencia J_2, J_1
    Else
        seq $\leftarrow$ Torneio($J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}$) # retirou jogador J_n
        If J_n não ganhou de nenhum jogador
            Insira J_n no fim da sequencia *seq*
        Else
            $p \leftarrow$ primeiro jogador em *seq* tal que J_n ganhou de p
            Insira J_n logo antes de p na sequencia *seq*
        Return seq

Exercicio: a) Considere uma festa com n pessoas onde cada uma conheça no máximo 2 outras

Prove que é possível separar as pessoas em 3 grupos de modo que quaisquer duas pessoas do mesmo grupo não se conheçam

(I.e., podemos pintar as pessoas com 3 cores tal que se a conhece b, então tem cores diferentes)

b) Transforme sua prova em um algoritmo recursivo para pintar as pessoas da forma desejada.

Pode assumir que a entrada são objetos $P[1], P[2], \ldots, P[n]$, com propriedades:

- $P[i].amigo1$: primeiro conhecido da pessoa $P[i]$ (null se não existe)
- $P[i].amigo2$: segundo conhecido da pessoa $P[i]$ (null se não existe)
- $P[i].cor$: a cor que voce atribuirá a à pessoa $P[i]$

Corretude de algoritmos iterativos

Algoritmos iterativos

Podemos também usar indução para provar corretude de algoritmos iterativos (não-recursivos)

Algoritmos iterativos

Podemos também usar indução para provar corretude de algoritmos iterativos (não-recursivos)

$$\text{hipótese indutiva} \equiv \text{invariante do } \textbf{For}$$

Algoritmos iterativos

Podemos também usar indução para provar corretude de algoritmos iterativos (não-recursivos)

$$\text{hipótese indutiva} \equiv \text{invariante do } \textbf{For}$$

Vamos só fazer alguns exemplos simples

(o livro-texto do Rosen vê isso em muito mais profundidade)

Algoritmos iterativos

Função foo(n)
    $x \leftarrow 0$
    For $i = 1$ **to** n
        $x \leftarrow x + 3$ $(*)$
    End for
    Return x

Algoritmos iterativos

Função foo(n)
    $x \leftarrow 0$
    For $i = 1$ **to** n
        $x \leftarrow x + 3$ $(*)$
    End for
    Return x

Proposição (1)

Para todo inteiro $n \geq 1$, foo(n) retorna o número $3n$.

Algoritmos iterativos

Função foo(n)
    $x \leftarrow 0$
    For $i = 1$ **to** n
        $x \leftarrow x + 3$ $(*)$
    End for
    Return x

Proposição (1)

Para todo inteiro $n \geq 1$, foo(n) retorna o número $3n$.

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $i \geq 1$, ao fim da i-ésima iteração do **For** (após executar $(*)$), $x = 3i$*

Algoritmos iterativos

Função foo(n)
    $x \leftarrow 0$
    For $i = 1$ **to** n
        $x \leftarrow x + 3$ $(*)$
    End for
    Return x

Proposição (1)

Para todo inteiro $n \geq 1$, $foo(n)$ retorna o número $3n$.

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $i \geq 1$, ao fim da i-ésima iteração do **For** (após executar $(*)$), $x = 3i$*

Proposição 2 implica na Proposição 1, pois $foo(n)$ retorna valor de x logo após a n-ésima iteração do **For**

Proposição (Invariante do **For**)

Para todo $i \geq 1$, *ao fim da* i*-ésima iteração do* ***For*** *(após executar* $(*)$*),* $x = 3i$ *(caso essa iteração exista)*

Prova: Por indução fraca em i, número da iteração

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $i \geq 1$, ao fim da i-ésima iteração do **For** (após executar $(*)$), $x = 3i$* *(caso essa iteração exista)*

Prova: Por indução fraca em i, número da iteração

Caso base: $i = 1$. Como x inicia como 0, verificamos que ao fim da primeira iteração do **For** $x = 3$

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $i \geq 1$, ao fim da i-ésima iteração do **For** (após executar $(*)$), $x = 3i$* *(caso essa iteração exista)*

Prova: Por indução fraca em i, número da iteração

Caso base: $i = 1$. Como x inicia como 0, verificamos que ao fim da primeira iteração do **For** $x = 3$

Passo indutivo. Seja $i \geq 2$, suponha verdade para a $i - 1$-ésima iteração. Precisamos provar para a iteração i

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $i \geq 1$, ao fim da i-ésima iteração do **For** (após executar $(*)$), $x = 3i$* *(caso essa iteração exista)*

Prova: Por indução fraca em i, número da iteração

Caso base: $i = 1$. Como x inicia como 0, verificamos que ao fim da primeira iteração do **For** $x = 3$

Passo indutivo. Seja $i \geq 2$, suponha verdade para a $i - 1$-ésima iteração. Precisamos provar para a iteração i

Devido ao algoritmo

$$(x \text{ ao fim da iteração } i) = (x \text{ ao fim da iteração } i - 1) + 3$$

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $i \geq 1$, ao fim da i-ésima iteração do **For** (após executar $(*)$), $x = 3i$* *(caso essa iteração exista)*

Prova: Por indução fraca em i, número da iteração

Caso base: $i = 1$. Como x inicia como 0, verificamos que ao fim da primeira iteração do **For** $x = 3$

Passo indutivo. Seja $i \geq 2$, suponha verdade para a $i-1$-ésima iteração. Precisamos provar para a iteração i

Devido ao algoritmo

$$(x \text{ ao fim da iteração } i) = (x \text{ ao fim da iteração } i-1) + 3$$
$$\overset{hip\ ind}{=} 3(i-1) + 3 \ = \ 3i$$

Isso conclui o passo indutivo. Fim de prova

Uma coisa interessante dessa análise é que precisamos criar uma proposição auxiliar para o **For**

Fibonacci

Definição

A sequencia de Fibonacci $F_0, F_1, \ldots,$ *é definida assim:*

- $F_0 = 0, \quad F_1 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ *para* $i \geq 2$

Considere o seguinte algoritmo para calcular F_n

Função Fib(n)
    $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
    $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
    For $i = 2$ to n
        $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
    End For
    Return $F[n]$

Função Fib(n)
    $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
    $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
    For $i = 2$ to n
        $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
    End For
    Return $F[n]$

Proposição (1)

Para todo $n \geq 0$, $Fib(n)$ retorna o número de Fibonacci F_n

Função Fib(n)
    $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
    $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
    For $i = 2$ to n
        $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
    End For
    Return $F[n]$

Proposição (1)

Para todo $n \geq 0$, $Fib(n)$ retorna o número de Fibonacci F_n

Q: Qual é o invariante do **For** que devemos provar?

Função Fib(n)
  $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
  $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
  For $i = 2$ to n
    $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
  End For
  Return $F[n]$

Proposição (1)

Para todo $n \geq 0$, $Fib(n)$ retorna o número de Fibonacci F_n

Q: Qual é o invariante do **For** que devemos provar?

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $2 \leq i \leq n$, ao fim da iteração i do **For** temos que $F[0], F[1], \ldots, F[i]$ são os números de Fibonacci apropriados*

Função Fib(n)
    $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
    $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
    For $i = 2$ to n
        $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
    End For
    Return $F[n]$

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $2 \leq i \leq n$, ao fim da iteração i do **For** temos que $F[0], F[1], \ldots, F[i]$ são os números de Fibonacci apropriados*

Prova: Por indução em i

Função Fib(n)
    $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
    $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
    For $i = 2$ to n
        $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
    End For
    Return $F[n]$

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $2 \leq i \leq n$, ao fim da iteração i do **For** temos que $F[0], F[1], \ldots, F[i]$ são os números de Fibonacci apropriados*

Prova: Por indução em i

Caso base: $i = 2$. $F[0]$ e $F[1]$ são inicializados com os números de Fibonacci apropriados, então ao fim da iteração $i = 2$ temos $F[2]$ correto

Função Fib(n)
    $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
    $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
    For $i = 2$ to n
        $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
    End For
    Return $F[n]$

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $2 \leq i \leq n$, ao fim da iteração i do **For** temos que $F[0], F[1], \ldots, F[i]$ são os números de Fibonacci apropriados*

Passo indutivo. Suponha que valha pra $i-1$, prove para i

Função Fib(n)
    $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
    $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
    For $i = 2$ to n
        $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
    End For
    Return $F[n]$

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $2 \leq i \leq n$, ao fim da iteração i do **For** temos que $F[0], F[1], \ldots, F[i]$ são os números de Fibonacci apropriados*

Passo indutivo. Suponha que valha pra $i-1$, prove para i

Pela hipótese indutiva, ao fim da iteração $i-1$ temos $F[0], \ldots, F[i-1]$ corretos...

Função Fib(n)
    $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
    $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
    For $i = 2$ to n
        $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
    End For
    Return $F[n]$

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $2 \leq i \leq n$, ao fim da iteração i do **For** temos que $F[0], F[1], \ldots, F[i]$ são os números de Fibonacci apropriados*

Passo indutivo. Suponha que valha pra $i-1$, prove para i

Pela hipótese indutiva, ao fim da iteração $i-1$ temos $F[0], \ldots, F[i-1]$ corretos. . . . . continua correto no início da iteração i

Função Fib(n)
    $F \leftarrow$ vetor com posição $F[0]$ até $F[n]$
    $F[0] \leftarrow 0, \quad F[1] \leftarrow 1$
    For $i = 2$ to n
        $F[i] = F[i-1] + F[i-2]$
    End For
    Return $F[n]$

Proposição (Invariante do **For**)

*Para todo $2 \leq i \leq n$, ao fim da iteração i do **For** temos que $F[0], F[1], \ldots, F[i]$ são os números de Fibonacci apropriados*

Passo indutivo. Suponha que valha pra $i-1$, prove para i

Pela hipótese indutiva, ao fim da iteração $i-1$ temos $F[0], \ldots, F[i-1]$ corretos. . . . . continua correto no início da iteração i

Nesse iteração computamos

$$\begin{aligned} F[i] &= F[i-1] + F[i-2] \\ &= F_{i-1} + F_{i-2} \\ &= F_i \qquad\qquad \Leftarrow \text{correto!} \end{aligned}$$