

Estruturas Discretas

Marco Molinaro

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

Proposição (forma original)

Se A , então B

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

Proposição (forma original)

Se A , então B

pode ser reescrita de forma de **forma contrapositiva**

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

Proposição (forma original)

Se A , então B

pode ser reescrita de forma ^{equivalente} de forma contrapositiva

Proposição (forma contrapositiva)

Se não B , então não A

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

✓ Proposição (forma original) ↙

↕
Se A , então B

pode ser reescrita de forma de forma contrapositiva

✓ Proposição (forma contrapositiva) ↘

Se não B , então não A

Essas proposições são equivalentes: se uma é verdade a outra também é, e vice-versa

Prova que é verdade, basta provar

Prova por Contraposição

Uma proposição de implicação

Proposição (forma original)

Se A , então B

pode ser reescrita de forma de **forma contrapositiva**

Proposição (forma contrapositiva)

*Se **não B** , então **não A***

Essas proposições são equivalentes: se uma é verdade a outra também é, e vice-versa

Prova por contraposição: Provar a forma contrapositiva da proposição

Prova por Contraposição

$$13 = 3 \times 4 + 1 \text{ impar} \checkmark$$

(Handwritten notes: a red 'x' is over the '4', a red arrow points from '4' to 'par', and a blue checkmark is at the end of the line.)

Proposição

Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é impar então n é par

(Handwritten annotations: blue checkmarks above the first and last parts of the sentence; a green arrow points from the first part to the second; blue underlines are under the two parts of the sentence.)

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é **ímpar** então n é **par***

Chato de provar de forma direta, difícil usar info $3n + 1$ é **ímpar**

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é ímpar então n é par

Chato de provar de forma direta, difícil usar info $3n + 1$ é ímpar

Vamos tentar pela contrapositiva:

P/ todo n , se n é ímpar então $3n+1$ é par

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é **ímpar** então n é **par***

Chato de provar de forma direta, difícil usar info $3n + 1$ é **ímpar**

Vamos tentar pela contrapositiva:

*Para todo inteiro n , se n é **ímpar** então $3n + 1$ é **par***

Essa forma parece mais fácil, dá para usar a info de n é **ímpar**

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é **ímpar** então n é **par***

Prova por contraposição:

Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é **ímpar** então n é **par***

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

*Para todo inteiro n , se n é **ímpar** então $3n + 1$ é **par** (1)*

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é *ímpar* então n é *par*

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

Para todo inteiro n , se n é *ímpar* então $3n + 1$ é *par* (1)

Para isso, pegue inteiro *ímpar* n qualquer

Então $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned} 3n + 1 &= 3(2k + 1) + 1 = 6k + 3 + 1 = 6k + 4 \\ &= 2(3k + 2) \end{aligned}$$

→ $3n + 1$ é par!



Prova por Contraposição

Proposição

*Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é **ímpar** então n é **par***

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

*Para todo inteiro n , se n é **ímpar** então $3n + 1$ é **par*** (1)

Para isso, pegue inteiro **ímpar** n qualquer

Então existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é *ímpar* então n é *par*

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

Para todo inteiro n , se n é *ímpar* então $3n + 1$ é *par* (1)

Para isso, pegue inteiro *ímpar* n qualquer

Então existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$, e portanto:

$$\begin{aligned}3n + 1 &= 3(2k + 1) + 1 \\ &= 6k + 4 \\ &= 2(3k + 2)\end{aligned}$$

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é *ímpar* então n é *par*

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

Para todo inteiro n , se n é *ímpar* então $3n + 1$ é *par* (1)

Para isso, pegue inteiro *ímpar* n qualquer

Então existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$, e portanto:

$$\begin{aligned}3n + 1 &= 3(2k + 1) + 1 \\ &= 6k + 4 \\ &= 2(3k + 2)\end{aligned}$$

Portanto $3n + 1$ é *par*, o que prova (1).

Prova por Contraposição

Proposição

Para todo inteiro n , se $3n + 1$ é *ímpar* então n é *par*

Prova por contraposição: Vamos provar a proposição em forma contrapositiva:

Para todo inteiro n , se n é *ímpar* então $3n + 1$ é *par* (1)

Para isso, pegue inteiro *ímpar* n qualquer

Então existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$, e portanto:

$$\begin{aligned}3n + 1 &= 3(2k + 1) + 1 \\ &= 6k + 4 \\ &= 2(3k + 2)\end{aligned}$$

Portanto $3n + 1$ é *par*, o que prova (1). Isso conclui a prova da *proposição original*

Contradição vs Contraposição

• Contradição

• Contraposição

Contradição vs Contraposição

→ **Contradição**

qualquer proposição

Contraposição

se, então
só proposição com implicação $A \Rightarrow B$

Contradição vs Contraposição

Contradição

qualquer proposição

assume prop falsa, contradição

nega

Contraposição

só proposição com implicação $A \Rightarrow B$

prova $\neg B \Rightarrow \neg A$

equivale

Contradição vs Contraposição



Contradição

qualquer proposição
assume prop falsa, contradição
poderosa

Contraposição

só proposição com implicação $A \Rightarrow B$
prova $\neg B \Rightarrow \neg A$
simples

Se $x < y$, então
 $f(x) < f(y)$

$f(x)$ $f(y)$

x y

Exercício 1: Demonstre usando tabela verdade que “ $A \Rightarrow B$ ” é equivalente a “ $\neg B \Rightarrow \neg A$ ” (ou seja, prova por contraposição é correta)

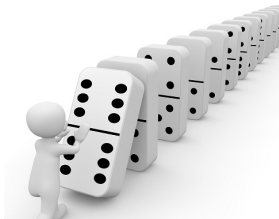
• **Exercício 2:** Prove por contraposição:

- ① Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se $f(x) < f(y)$, então $x < y$
- ② Seja n um número inteiro e d um de seus divisores. Se n é ímpar então d é ímpar

Indução Matemática

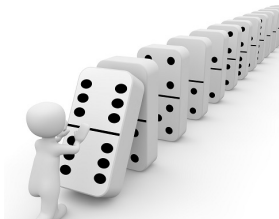
Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



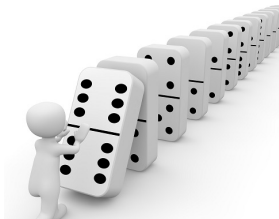
Princípio da Indução: **domino**

Em uma fileira de dominos

- Se o primeiro domino cai

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



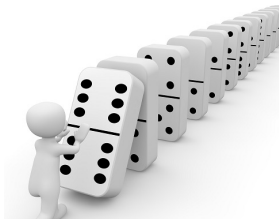
Princípio da Indução: **domino**

Em uma fileira de dominos

- Se o primeiro domino cai
- E cada domino caindo derruba o próximo

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



Princípio da Indução: **domino**

Em uma fileira de dominos

- Se o primeiro domino cai
- E cada domino caindo derruba o próximo

Então **todos** os dominos caem

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

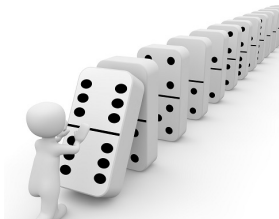


Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



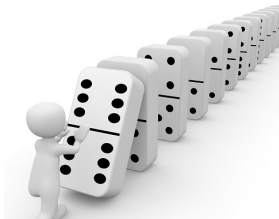
Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



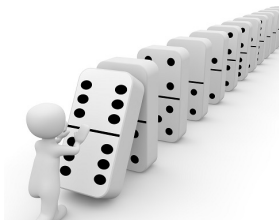
Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0
- **(Passo indutivo)** Para qualquer $n \geq n_0$, se *Propriedade* vale para n , então vale para $n + 1$

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: Demonstrar que propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0



Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0
- **(Passo indutivo)** Para qualquer $n \geq n_0$, se *Propriedade* vale para n , então vale para $n + 1$

Então a *Propriedade* **vale para todo** inteiro $\geq n_0$

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)

Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, a n -ésima rodada tem 2^n barras de ferro

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)

Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, a n -ésima rodada tem 2^n barras de ferro

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)

Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, a n -ésima rodada tem 2^n barras de ferro

Prova:

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)

Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, a n -ésima rodada tem 2^n barras de ferro

Prova:

Propriedade que queremos provar para todo inteiro $n \geq 0$: rodada n tem 2^n barras de ferro

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)

Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, a n -ésima rodada tem 2^n barras de ferro

Prova:

Propriedade que queremos provar para todo inteiro $n \geq 0$: rodada n tem 2^n barras de ferro

Caso base: $n = 0$. Precisamos verificar que a propriedade vale nesse caso

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que tenhamos 1 barras de ferro (rodada 0)

Em cada rodada, dividimos cada barra de ferro em 2 metades

Prove pra todo $n \geq 0$, a n -ésima rodada tem 2^n barras de ferro

Prova:

Propriedade que queremos provar para todo inteiro $n \geq 0$: rodada n tem 2^n barras de ferro

Caso base: $n = 0$. Precisamos verificar que a propriedade vale nesse caso

Por definição a rodada 0 tem 1 barra de ferro, e portanto tem $2^0 = 1$ barras. Então a propriedade vale pro caso base

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, **suponha** que a propriedade valha para n ; **precisamos mostrar** que ela vale para $n + 1$

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, **suponha que a propriedade valha para n** ; **precisamos mostrar que ela vale para $n + 1$**

Para isso vamos representar a situação da rodada $n + 1$ em relação à rodada n :

$$[\# \text{ barras na rodada } n + 1] = 2 \cdot [\# \text{ barras na rodada } n]$$

.

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, **suponha que a propriedade valha para n** ; **precisamos mostrar que ela vale para $n + 1$**

Para isso vamos representar a situação da rodada $n + 1$ em relação à rodada n :

$$[\# \text{ barras na rodada } n + 1] = 2 \cdot [\# \text{ barras na rodada } n]$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para n :

$$[\# \text{ barras na rodada } n + 1] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, **suponha que a propriedade valha para n** ; **precisamos mostrar que ela vale para $n + 1$**

Para isso vamos representar a situação da rodada $n + 1$ em relação à rodada n :

$$[\# \text{ barras na rodada } n + 1] = 2 \cdot [\# \text{ barras na rodada } n]$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para n :

$$[\# \text{ barras na rodada } n + 1] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Portanto a propriedade vale para $n + 1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, **suponha que a propriedade valha para n** ; **precisamos mostrar que ela vale para $n + 1$**

Para isso vamos representar a situação da rodada $n + 1$ em relação à rodada n :

$$[\# \text{ barras na rodada } n + 1] = 2 \cdot [\# \text{ barras na rodada } n]$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para n :

$$[\# \text{ barras na rodada } n + 1] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Portanto a propriedade vale para $n + 1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Com isso, concluímos a prova por indução

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$$

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$$

Prova:

Propriedade que queremos provar pra todo $k \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$$

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$$

Prova:

Propriedade que queremos provar pra todo $k \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$$

Caso base: $k = 1$. Para provar o caso base, verificamos que a propriedade vale nesse caso: $(2 \cdot 1 - 1) = 1^2$

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$$

Prova:

Propriedade que queremos provar pra todo $k \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$$

Caso base: $k = 1$. Para provar o caso base, verificamos que a propriedade vale nesse caso: $(2 \cdot 1 - 1) = 1^2$

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, **suponha que a propriedade valha para k** ; **precisamos mostrar que ela vale para $k + 1$**

Exemplo

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para k ; precisamos mostrar que ela vale para $k + 1$

[Fazer explicitamente pra $k = 1$, $k = 2$?]

Exemplo

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, **suponha que a propriedade valha para k** ; **precisamos mostrar que ela vale para $k + 1$**

[Fazer explicitamente pra $k = 1$, $k = 2$?]

Para isso vamos representar a propriedade para $k + 1$ em relação a propriedade para k :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1)}_{\text{prop para } k + 1} = \underbrace{\sum_{i=1}^k (2i - 1)}_{\text{prop para } k} + (2[k + 1] - 1)$$

Exemplo

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, **suponha que a propriedade valha para k** ; **precisamos mostrar que ela vale para $k + 1$**

[Fazer explicitamente pra $k = 1$, $k = 2$?]

Para isso vamos representar a propriedade para $k + 1$ em relação a propriedade para k :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1)}_{\text{prop para } k + 1} = \underbrace{\sum_{i=1}^k (2i - 1)}_{\text{prop para } k} + (2[k + 1] - 1)$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para k :

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = k^2 + (2[k + 1] - 1)$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) &= k^2 + (2[k + 1] - 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) &= k^2 + (2[k + 1] - 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2\end{aligned}$$

Portanto a propriedade vale para $k + 1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Exemplo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) &= k^2 + (2[k + 1] - 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2\end{aligned}$$

Portanto a propriedade vale para $k + 1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Com isso, concluímos a prova por indução

Exercício: Prove por indução as seguintes proposições

- 1 Para todo inteiro $n \geq 2$, $2^{n+1} < 3^n$
- 2 Todo número inteiro $n \geq 0$ é par ou ímpar (veja definição de par/ímpar no slide da última aula)
- 3 (Progressão aritmética) Para todo inteiro $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- 4 (Progressão geométrica) Considere um número real $r \neq 0$. Para todo inteiro $n \geq 0$,

$$r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Exemplos

Considere o seguinte código

```
Prog1(int n)
  If n=1
    Print('OI')
    Return
  Else
    For  $i = 1$  to  $n$ 
      Print('OI')
    End for
  Prog1(n-1)
End if
```

Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra “OI” é impressa quando Prog1 é chamado com parâmetro n

Proposição

Para todo inteiro $n \geq 1$, $T(n) \leq n^2$

Teorema

A soma dos angulos de um triangulo é 180

Exemplos

Teorema

A soma dos ângulos de um triângulo é 180

Não vamos provar esse teorema

Teorema

A soma dos ângulos de um triângulo é 180

Não vamos provar esse teorema

Mas vamos utilizar pra provar a seguinte generalização

Exemplos

Teorema

A soma dos ângulos de um triângulo é 180

Não vamos provar esse teorema

Mas vamos utilizar pra provar a seguinte generalização

Proposição

A soma dos ângulos de um polígono convexo de n vértices é $180(n - 2)$ para todo $n \geq 3$.

Prova: (um pouco informal, precisa de mais detalhes)

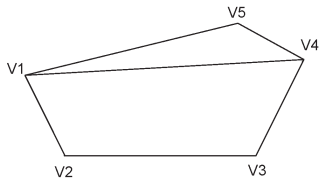
Caso base: $n = 3$ Nesse caso o poligono é um triangulo, e sabemos pelo teorema acima que

$$\text{soma dos angulos} = 180 = 180 \cdot (3 - 2).$$

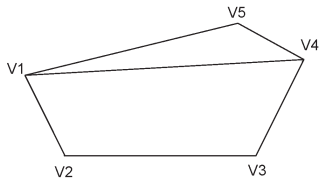
Passo Indutivo. Considere $n \geq 3$ e assumamos que a propriedade vale para n

(hipótese indutiva)

Precisamos mostrar que ela também vale para $n + 1$.

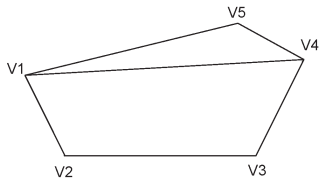


Considere um polígono com $n + 1$ vértices V_1, V_2, \dots, V_{n+1}



Considere um polígono com $n + 1$ vértices V_1, V_2, \dots, V_{n+1}

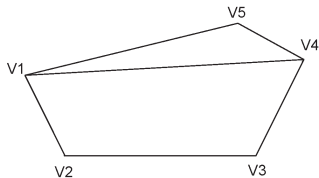
Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n



Considere um polígono com $n + 1$ vértices V_1, V_2, \dots, V_{n+1}

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desto forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

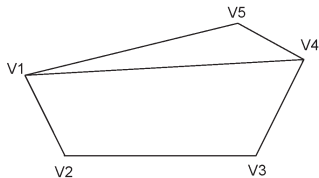


Considere um polígono com $n + 1$ vértices V_1, V_2, \dots, V_{n+1}

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desto forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

A soma dos angulos do triangulo é 180.

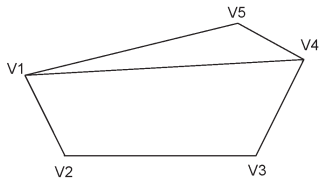


Considere um polígono com $n + 1$ vértices V_1, V_2, \dots, V_{n+1}

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desto forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

A soma dos angulos do triangulo é 180. E pela **hipótese indutiva** a soma dos angulos do poligono restante é $180(n - 2)$



Considere um polígono com $n + 1$ vértices V_1, V_2, \dots, V_{n+1}

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desto forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

A soma dos angulos do triangulo é 180. E pela **hipótese indutiva** a soma dos angulos do poligono restante é $180(n - 2)$

Logo a soma dos angulos do poligono original é [triangulo] + [resto]:

$$180 + 180(n - 2) = 180((n + 1) - 2).$$

Exercício

Exercício: Considere o seguinte código

```
Prog2(int n)
  If n=1
    Print('OI')
    Return
  Else
    For  $i = 1$  to  $n$ 
      Print('OI')
    End for
    Prog2(n-1)
    Prog2(n-1)
  End if
```

Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra “OI” é impressa quando Prog2 é chamado com parâmetro n

Mostre que para todo inteiro $n \geq 1$, $T(n) \leq 2^n \cdot n$

Dica: Pode usar fato que $n \leq 2^n$ para todo $n \geq 1$