

Estruturas Discretas

Marco Molinaro

- 1 Tipos de Demonstração
 - Recapitulação
 - Prova por Contradição

Tipos de Demonstração

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**
- **Força-bruta**: proposição com numero **finito** de possibilidades

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**
- **Força-bruta**: proposição com numero **finito** de possibilidades
- **Direta**: A partir da **hipotese** (o que é conhecido/dado sobre o objeto) encadeamento de passos até obter a **tese** (o que queremos provar)

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**
- **Força-bruta**: proposição com numero **finito** de possibilidades
- **Direta**: A partir da **hipotese** (o que é conhecido/dado sobre o objeto) encadeamento de passos até obter a **tese** (o que queremos provar)

Hoje: **Contradição, Contraposição, e Indução**

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é verdadeira vamos:

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é verdadeira vamos:

- **Assumir que proposição é falsa**

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é verdadeira vamos:

- **Assumir que proposição é falsa**
- Mostrar que isso **leva a contradição** de algo que conhecemos/assumimos (e.g. isso implica que 2 é impar)

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é verdadeira vamos:

- **Assumir que proposição é falsa**
- Mostrar que isso **leva a contradição** de algo que conhecemos/assumimos (e.g. isso implica que 2 é impar)

⇒ Portanto a proposição **não pode ser falsa**

Prova por Contradição

1 é o menor número natural. Vamos mostrar que não existe o menor número **racional**

Proposição

Não existe um número racional positivo menor ou igual a todos os números racionais positivos

Proposição

Não existe um número racional positivo menor ou igual a todos os números racionais positivos

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r **menor ou igual a todos os números racionais positivos**

Proposição

Não existe um número racional positivo menor ou igual a todos os números racionais positivos

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r **menor ou igual a todos os números racionais positivos**

Mas o número $r/2$ é um número racional positivo (Teticamente teríamos que provar isso!)

Proposição

Não existe um número racional positivo menor ou igual a todos os números racionais positivos

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r **menor ou igual a todos os números racionais positivos**

Mas o número $r/2$ é um número racional positivo (Teticamente teríamos que provar isso!)

Como r é positivo, $r > r/2$ (**estritamente**) (Teticamente teríamos que provar isso!)

Proposição

Não existe um número racional positivo menor ou igual a todos os números racionais positivos

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r **menor ou igual a todos os números racionais positivos**

Mas o número $r/2$ é um número racional positivo (Teticamente teríamos que provar isso!)

Como r é positivo, $r > r/2$ (**estritamente**) (Teticamente teríamos que provar isso!)

Então isso **contradiz** que r é menor ou igual a todos os números racionais positivos

Proposição

Não existe um número racional positivo menor ou igual a todos os números racionais positivos

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r **menor ou igual a todos os números racionais positivos**

Mas o número $r/2$ é um número racional positivo (Teticamente teríamos que provar isso!)

Como r é positivo, $r > r/2$ (**estritamente**) (Teticamente teríamos que provar isso!)

Então isso **contradiz** que r é menor ou igual a todos os números racionais positivos

Portanto, a hipótese na linha 1 é falsa, ou seja, a proposição é verdadeira

Prova por Contradição

Proposição

Para todo número inteiro n , se n^2 é par então n é par

Prova por Contradição

Proposição

Para todo número inteiro n , se n^2 é par então n é par

(Vamos utilizar o “fato” que se um número não é par, então é ímpar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova por Contradição

Proposição

Para todo número inteiro n , se n^2 é par então n é par

(Vamos utilizar o “fato” que se um número não é par, então é ímpar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Prova por Contradição

Proposição

Para todo número inteiro n , se n^2 é par então n é par

(Vamos utilizar o “fato” que se um número não é par, então é ímpar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é **par** mas n é **ímpar**

Prova por Contradição

Proposição

Para todo número inteiro n , se n^2 é par então n é par

(Vamos utilizar o “fato” que se um número não é par, então é ímpar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é **par** mas n é **ímpar**

Como n é ímpar, por definição existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$

Prova por Contradição

Proposição

Para todo número inteiro n , se n^2 é par então n é par

(Vamos utilizar o “fato” que se um número não é par, então é ímpar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é **par** mas n é **ímpar**

Como n é ímpar, por definição existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$

Então

$$\begin{aligned}n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1\end{aligned}$$

Prova por Contradição

Proposição

Para todo número inteiro n , se n^2 é par então n é par

(Vamos utilizar o “fato” que se um número não é par, então é ímpar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é **par** mas n é **ímpar**

Como n é ímpar, por definição existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$

Então

$$\begin{aligned}n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1\end{aligned}$$

Portanto, n^2 é **ímpar**. Isso **contradiz** que n^2 é **par**. Fim da prova.

Prova por Contradição

Definição

Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$

Prova por Contradição

Definição

Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$

Proposição (~500 aC)

$\sqrt{2}$ **não** é um **número racional**

Prova por Contradição

Definição

Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$

Proposição (~500 aC)

$\sqrt{2}$ **não** é um **número racional**

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ é **racional**

Prova por Contradição

Definição

Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$

Proposição (~500 aC)

$\sqrt{2}$ **não** é um **número racional**

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ é **racional**

Por definição, existem inteiros p e $q \neq 0$ **sem fatores** comum tal que $\sqrt{2} = p/q$

Prova por Contradição

Definição

Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$

Proposição (~500 aC)

$\sqrt{2}$ **não** é um **número racional**

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ é **racional**

Por definição, existem inteiros p e $q \neq 0$ **sem fatores** comum tal que $\sqrt{2} = p/q$

Rearrmando temos $p = \sqrt{2} \cdot q$, o que implica $p^2 = 2q^2$ (1)

Prova por Contradição

Definição

Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$

Proposição (~500 aC)

$\sqrt{2}$ **não** é um **número racional**

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ é **racional**

Por definição, existem inteiros p e $q \neq 0$ **sem fatores** comum tal que $\sqrt{2} = p/q$

Rearrmando temos $p = \sqrt{2} \cdot q$, o que implica $p^2 = 2q^2$ (1)

Portanto p^2 é par. Pela **proposição do slide anterior**, isso implica que p é **par**

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$\begin{aligned}p^2 &= 2q^2 \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{p^2}{2} \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{4k^2}{2} = 2k^2 \\ \Rightarrow q^2 &\text{ é par}\end{aligned}$$

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$\begin{aligned}p^2 &= 2q^2 \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{p^2}{2} \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{4k^2}{2} = 2k^2 \\ \Rightarrow q^2 &\text{ é par}\end{aligned}$$

Novamente utilizando a **proposição do slide anterior**, isso implica que q é **par**

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$\begin{aligned}p^2 &= 2q^2 \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{p^2}{2} \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{4k^2}{2} = 2k^2 \\ \Rightarrow q^2 &\text{ é par}\end{aligned}$$

Novamente utilizando a **proposição do slide anterior**, isso implica que q é **par**

Como p e q são ambos par, eles **têm 2 como fator comum**

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$\begin{aligned}p^2 &= 2q^2 \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{p^2}{2} \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{4k^2}{2} = 2k^2 \\ \Rightarrow q^2 &\text{ é par}\end{aligned}$$

Novamente utilizando a **proposição do slide anterior**, isso implica que q é **par**

Como p e q são ambos par, eles **têm 2 como fator comum**

Isso **contradiz** que p e q **não têm fator comum**. Fim de prova

Exercício: Demonstre as seguintes proposições por contradição:

- 1 Para todo número inteiro n , se $5n$ é ímpar então n é ímpar
- 2 Não existe número inteiro n **ímpar** tal que $3n + 2$ é par
- 3 Para todos números inteiros a e b , se $a^2 + b^2$ é ímpar, então $a + b$ é ímpar

Dica: Lembre que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

- 4 Se x é um número racional e y é um número **irracional**, então $x + y$ é irracional

Dica: Pode usar o fato que n é racional se e somente se existem inteiros p, q tal que $n = \frac{p}{q}$ (p e q não precisam ser primos)