Estruturas Discretas

Marco Molinaro

Conteúdo

Tipos de Demonstração

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**
- **Força-bruta**: proposição com numero **finito** de possibilidades

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**
- **Força-bruta**: proposição com numero **finito** de possibilidades
- **Direta**: A partir da **hipotese** (o que é conhecido/dado sobre o objeto) encadeamento de passos até obter a **tese** (o que queremos provar)

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**
- **Força-bruta**: proposição com numero **finito** de possibilidades
- **Direta**: A partir da **hipotese** (o que é conhecido/dado sobre o objeto) encadeamento de passos até obter a **tese** (o que queremos provar)

Hoje: **Contradição**

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é **verdadeira** vamos:

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é **verdadeira** vamos:

- **Assumir que proposição é falsa**

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é **verdadeira** vamos:

- **Assumir que proposição é falsa**
- Mostrar que isso **leva a uma contradição** **qualquer** (e.g. "2 é impar", "1=0", etc.)

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é **verdadeira** vamos:

- **Assumir que proposição é falsa**
- Mostrar que isso **leva a uma contradição qualquer** (e.g. "2 é impar", "1=0", etc.)

$\Rightarrow$ Então **assumiu** errado: a proposição é **verdadeira**!

Prova por Contradição

1 é o menor numero natural. Vamos mostrar que não existe o menor número **racional**

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Mas o numero $r/2$ é um número racional positivo (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Mas o numero $r/2$ é um número racional positivo (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Como r é positivo, $r > r/2$ **(estritamente)** (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Mas o numero $r/2$ é um número racional positivo (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Como r é positivo, $r > r/2$ **(estritamente)** (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Então isso **contradiz** que r é menor ou igual a todos os números racionais positivos

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Mas o numero $r/2$ é um número racional positivo (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Como r é positivo, $r > r/2$ **(estritamente)** (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Então isso **contradiz** que r é menor ou igual a todos os números racionais positivos

Portanto, a hipótese na linha 1 é falsa, ou seja, a proposição é verdadeira

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro* n, *se* n^2 *é par então* n *é par*

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é par mas n é **impar**

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é par mas n é **impar**

Como n é impar, por definição existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é par mas n é **impar**

Como n é impar, por definição existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$
Então

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é par mas n é **impar**

Como n é impar, por definição existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$
Então

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Portanto, n^2 é **impar**. Isso **contradiz** que n^2 é par. Fim da prova.

Prova por Contradição

Definição

*Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$*

Prova por Contradição

Definição

*Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$*

Proposição (~500 aC)

*$\sqrt{2}$ **não** é um **número racional***

Prova por Contradição

Definição

*Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$*

Proposição (~500 aC)

$\sqrt{2}$ ***não** é um **número racional***

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ **é racional**

Prova por Contradição

Definição

*Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$*

Proposição (~500 aC)

*$\sqrt{2}$ **não** é um **número racional***

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ **é racional**

Por definição, existem inteiros p e $q \neq 0$ sem fatores comum tal que $\sqrt{2} = p/q$

Prova por Contradição

Definição

*Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$*

Proposição (~500 aC)

*$\sqrt{2}$ **não** é um **número racional***

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ **é racional**

Por definição, existem inteiros p e $q \neq 0$ sem fatores comum tal que $\sqrt{2} = p/q$

Rearrumando temos $p = \sqrt{2} \cdot q$, o que implica $p^2 = 2q^2$ (1)

Prova por Contradição

Definição

*Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$*

Proposição (~500 aC)

$\sqrt{2}$ ***não** é um **número racional***

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ **é racional**

Por definição, existem inteiros p e $q \neq 0$ sem fatores comum tal que $\sqrt{2} = p/q$

Rearrumando temos $p = \sqrt{2} \cdot q$, o que implica $p^2 = 2q^2$ (1)

Portanto p^2 é par. Pela **proposição do slide anterior**, isso implica que p é **par**

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$
\begin{aligned}
& p^2 = 2q^2 \\
\Rightarrow \quad & q^2 = \frac{p^2}{2} \\
\Rightarrow \quad & q^2 = \frac{4k^2}{2} = 2k^2 \\
\Rightarrow \quad & q^2 \text{ é par}
\end{aligned}
$$

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$\begin{aligned} & p^2 = 2q^2 \\ \Rightarrow\ & q^2 = \frac{p^2}{2} \\ \Rightarrow\ & q^2 = \frac{4k^2}{2} = 2k^2 \\ \Rightarrow\ & q^2 \text{ é par} \end{aligned}$$

Novamente utilizando a **proposição do slide anterior**, isso implica que q é **par**

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$\begin{aligned} & p^2 = 2q^2 \\ \Rightarrow\ & q^2 = \frac{p^2}{2} \\ \Rightarrow\ & q^2 = \frac{4k^2}{2} = 2k^2 \\ \Rightarrow\ & q^2 \text{ é par} \end{aligned}$$

Novamente utilizando a **proposição do slide anterior**, isso implica que q é **par**

Como p e q são ambos par, eles **têm 2 como fator comum**

Prova por Contradição

Então existe inteiro k tal que $p = 2k$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$
\begin{aligned}
& p^2 = 2q^2 \\
\Rightarrow \quad & q^2 = \frac{p^2}{2} \\
\Rightarrow \quad & q^2 = \frac{4k^2}{2} = 2k^2 \\
\Rightarrow \quad & q^2 \text{ é par}
\end{aligned}
$$

Novamente utilizando a **proposição do slide anterior**, isso implica que q é **par**

Como p e q são ambos par, eles **têm 2 como fator comum**

Isso **contradiz** que p e q não têm fator comum. Fim de prova

1) Assume falso

2) Chego absurdo/ contradição qualquer $(1=0)$

$\Rightarrow$ Prop é Verdade

Exercicio: Demonstre as seguintes proposições por contradição:

1. Para todo número inteiro n, se $5n$ é impar então n é impar
2. Não existe número inteiro n **impar** tal que $3n + 2$ é par
3. Para todos números inteiros a e b, se $a^2 + b^2$ é impar, então $a + b$ é impar
   Dica: Lembre que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
4. Se x é um número racional e y é um número **irracional**, então $x + y$ é irracional
   Dica: Pode usar o fato que n é racional se e somente se existem inteiros p, q tal que $n = \frac{p}{q}$ (p e q não precisam ser primos)

$a=4$, $b=5$ $\quad a^2+b^2 = 16+25 = 41$ impar

$\rightsquigarrow a+b=9$ impar ✓

P/ todo inteiro a, b, se $a^2 + b^2$ ímpar, então $a+b$ ímpar

Prova: Por contradição

① Assuma que é falso

Ou seja, existe a e b tq a^2+b^2 é ímpar
mas $a+b$ é par

② $\underbrace{(a+b)^2}_{\to \text{par}} = \underbrace{\underbrace{a^2+b^2}_{\to \text{ímpar}} + \underbrace{2ab}_{\text{par}}}_{\text{ímpar}}$

③ $a+b = 2K$

$\rightsquigarrow$