

Ciclos

Percursos - pode ter repetições
Caminho - não tem repetições



Informalmente, um ciclo é um caminho que começa e termina no mesmo nó

*Percursos nos
vãos caminhos*

Ciclos

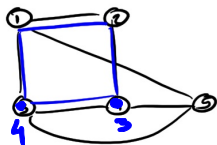
Informalmente, um **ciclo** é um caminho que começa e termina no mesmo nó

Definição (Ciclo)

Um **ciclo** é um passeio $W = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_k v_{k+1}$ onde:

(i) Os nós iniciais e finais são os mesmos: $v_1 = v_{k+1}$

(ii) Todos os outros nós são distintos ($v_i \neq v_j$ pra todo $i < j$ diferente de $i = 1, j = k + 1$) e todas as arestas são distintas



①-②-③-④-① é ciclo

①-②-① não é ciclo

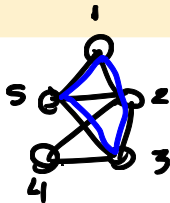
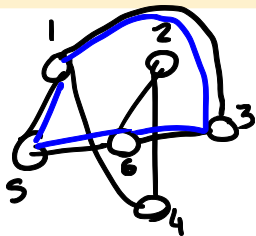
Proposição



Seja G um grafo simples onde todos os nós tem grau pelo menos 2.
Então G tem um ciclo

Ex:

$G =$



Proposição

Seja G um grafo *simples* onde todos os nós tem grau pelo menos 2.
Então G tem um ciclo

Prova: Considere o maior caminho $P = v_1 v_2 \dots v_k$ no grafo



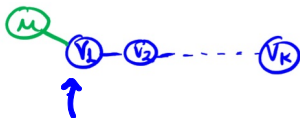
Proposição

Seja G um grafo *simples* onde todos os nós tem grau pelo menos 2.
Então G tem um ciclo

Prova: Considere o maior caminho $P = v_1 v_2 \dots v_k$ no grafo



Como v_1 tem grau pelo menos 2, ele tem outro vizinho u além de v_2



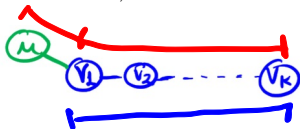
Proposição

Seja G um grafo *simples* onde todos os nós tem grau pelo menos 2.
Então G tem um ciclo

Prova: Considere o maior caminho $P = v_1 v_2 \dots v_k$ no grafo



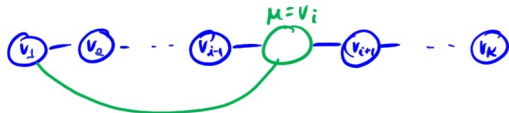
Como v_1 tem grau pelo menos 2, ele tem outro vizinho u além de v_2



Esse vizinho não pode estar fora do caminho P , senão
 $u \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ seria um caminho mais longo que P

Ciclo

Então u está no caminho P : $u = v_i$ para algum $v_i \in P$



\Rightarrow temos ciclo $v_1 v_2 \dots v_i v_1$ \square

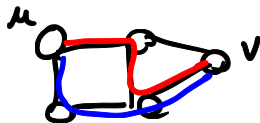
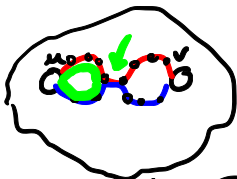
Exercícios

Exercício 1: Considere um grafo G . Prove que se existem dois nós u, v tal que existem **2 caminhos distintos** de u a v no grafo, então ele tem um ciclo.

Prova:

①

$G =$



Considere caminhos P_1 e P_2 de u a v

② Pegue o primeiro

Árvores

Definição (Árvore)

*Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos (acíclico)*

Theorem

Sejam u e v dois vértices distintos de uma árvore T . Existe exatamente um caminho entre u e v em T .

Exemplo:

Theorem

Sejam u e v dois vértices distintos de uma árvore T . Então exatamente um caminho entre u e v em T .

Prova:

Tem ≥ 1 caminho entre u e v , pois é grafo conexo

Theorem

Sejam u e v dois vértices distintos de uma árvore T . Então exatamente um caminho entre u e v em T .

Prova:

Tem ≥ 1 caminho entre u e v , pois é grafo conexo

Tem ≤ 1 caminho entre u e v :

Theorem

Sejam u e v dois vértices distintos de uma árvore T . Então exatamente um caminho entre u e v em T .

Prova:

Tem ≥ 1 caminho entre u e v , pois é grafo conexo

Tem ≤ 1 caminho entre u e v :

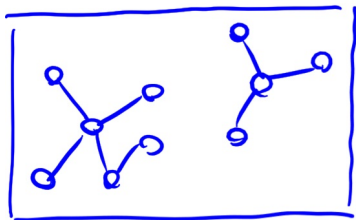
- Se tivéssemos dois caminhos entre u e v teríamos um ciclo (pelo exercício anterior)
- Não é possível, árvores não tem ciclo por definição

Árvores

Definição (Floresta)

Uma floresta é um grafo G em que todos os componentes conexos são árvores

(ou seja, é uma união de árvores disjuntas)



$= G$

\equiv graf sem ciclo

Proposição

*Seja T uma árvore e seja (u, v) uma aresta de T . O grafo $T - (u, v)$ (removendo aresta (u, v)) é uma floresta com **dois componentes conexos**, um contendo o nó v e outro contendo o nó u*

Exemplo:

Proposição

*Seja T uma árvore e seja (u, v) uma aresta de T . O grafo $T - (u, v)$ (removendo aresta (u, v)) é uma floresta com **dois componentes conexos**, um contendo o nó v e outro contendo o nó u*

Prova: 1) $T - (u, v)$ é floresta: T não tinha ciclo, $T - (u, v)$ também não tem

Proposição

*Seja T uma árvore e seja (u, v) uma aresta de T . O grafo $T - (u, v)$ (removendo aresta (u, v)) é uma floresta com **dois componentes conexos**, um contendo o nó v e outro contendo o nó u*

2) Não existe caminho entre u e v em $T - (u, v)$, e portanto esses nós estão em componentes conexos diferentes:

Pela proposição anterior, só tem um caminho entre u e v em T , então tem que ser o caminho “direto” que só usa aresta $(u, v) \Rightarrow$ esse único caminho desapareceu em $T - (u, v)$

Proposição

*Seja T uma árvore e seja (u, v) uma aresta de T . O grafo $T - (u, v)$ (removendo aresta (u, v)) é uma floresta com **dois componentes conexos**, um contendo o nó v e outro contendo o nó u*

3) Não tem mais do que 2 componentes conexos em $T - (u, v)$, pois tem no máximo um comp. conexo a mais que T :

Mencionamos na última aula que remover uma aresta aumenta o número de componentes conexos em no máximo 1

Ótimo exercício provar isso formalmente

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Exemplo:

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Prova: Indução forte no

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Prova: Indução forte no número de arestas

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Prova: Indução forte no número de arestas

Caso base: 0 arestas. Então G tem exatamente $nó(s)$,

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Prova: Indução forte no número de arestas

Caso base: 0 arestas. Então G tem exatamente 1 nó(s),

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Prova: Indução forte no **número de arestas**

Caso base: 0 arestas. Então G tem exatamente 1 nó(s), e temos $\#arestas = \#nós - 1$, OK!

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Prova: Indução forte no [número de arestas](#)

Caso base: 0 arestas. Então G tem exatamente 1 nó(s), e temos $\#arestas = \#nós - 1$, OK!

Passo indutivo: Suponha que o resultado valha para todas as árvores com $1, 2, \dots, m$ arestas

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Prova: Indução forte no [número de arestas](#)

Caso base: 0 arestas. Então G tem exatamente 1 nó(s), e temos $\#arestas = \#nós - 1$, OK!

Passo indutivo: Suponha que o resultado valha para todas as árvores com $1, 2, \dots, m$ arestas

Vamos provar pra árvore com $m + 1$ arestas

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Seja T uma árvore com $m + 1$ arestas.

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Seja T uma árvore com $m + 1$ arestas.

Q: Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Seja T uma árvore com $m + 1$ arestas.

Q: Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

A: Remova uma aresta (u, v) qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores T_u e T_v (contendo u e v respectivamente)

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Seja T uma árvore com $m + 1$ arestas.

Q: Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

A: Remova uma aresta (u, v) qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores T_u e T_v (contendo u e v respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o $\#arestas$ e $\#nós$ de T com as novas árvores:

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Seja T uma árvore com $m + 1$ arestas.

Q: Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

A: Remova uma aresta (u, v) qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores T_u e T_v (contendo u e v respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o $\#arestas$ e $\#nós$ de T com as novas árvores:

$\#arestas(T)$



Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Seja T uma árvore com $m + 1$ arestas.

Q: Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

A: Remova uma aresta (u, v) qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores T_u e T_v (contendo u e v respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o $\#arestas$ e $\#nós$ de T com as novas árvores:

$$\#arestas(T) = \#arestas(T_u) + \#arestas(T_v) + 1$$



Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Seja T uma árvore com $m + 1$ arestas.

Q: Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

A: Remova uma aresta (u, v) qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores T_u e T_v (contendo u e v respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o $\#arestas$ e $\#nós$ de T com as novas árvores:

$$\begin{aligned}\#arestas(T) &= \#arestas(T_u) + \#arestas(T_v) + 1 \\ &= (\#nós(T_u) - 1) + (\#nós(T_v) - 1) + 1 \quad (\text{hip indut})\end{aligned}$$



Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Seja T uma árvore com $m + 1$ arestas.

Q: Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

A: Remova uma aresta (u, v) qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores T_u e T_v (contendo u e v respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o $\#arestas$ e $\#nós$ de T com as novas árvores:

$$\begin{aligned}\#arestas(T) &= \#arestas(T_u) + \#arestas(T_v) + 1 \\ &= \left(\#nós(T_u) - 1\right) + \left(\#nós(T_v) - 1\right) + 1 \quad (\text{hip indut}) \\ &= \#nós(T) - 1 - 1 + 1\end{aligned}$$

□

Teorema

Se T é uma árvore não vazia, então $\#arestas(T) = \#nós(T) - 1$

Seja T uma árvore com $m + 1$ arestas.

Q: Como relacionar com árvores com $\leq m$ arestas?

A: Remova uma aresta (u, v) qualquer. Isso quebra a árvore em duas árvores T_u e T_v (contendo u e v respectivamente)

Vendo o que queremos provar, temos que relacionar o $\#arestas$ e $\#nós$ de T com as novas árvores:

$$\begin{aligned}\#arestas(T) &= \#arestas(T_u) + \#arestas(T_v) + 1 \\ &= \left(\#nós(T_u) - 1\right) + \left(\#nós(T_v) - 1\right) + 1 \quad (\text{hip indut}) \\ &= \#nós(T) - 1 - 1 + 1 \\ &= \#nós(T) - 1 \quad \square\end{aligned}$$

Exercício 1: Uma **folha** de uma árvore é um nó de grau ≤ 1 . Prove que toda árvore T não vazia tem pelo menos uma folha

Dicas:

- i) Use uma proposição que provamos sobre existência de ciclos
- ii) Use contradição

Obs: Folhas são muito importantes para fazer prova por indução no número de nós de uma árvore, pois removendo uma folha obtemos uma **árvore** com 1 nó a menos