

# Estruturas Discretas

Marco Molinaro

- 1 Conceitos Básicos para Demonstrações
  - Teorema
  - Proposição
  - Definições
- 2 Quantificadores
- 3 Exercícios

# Conceitos Básicos para Demonstrações

**Demonstrações** são foco da nossa disciplina

**Demonstrações** são foco da nossa disciplina

**Porque?**

**Demonstrações** são foco da nossa disciplina

**Porque?**

Raciocinar de forma precisa/sem ambiguidades

**Demonstrações** são foco da nossa disciplina

**Porque?**

Raciocinar de forma precisa/sem ambiguidades

Certificar que determinado algoritmo **realmente funciona**

- Algoritmos de criptografia
- Algoritmos de ordenacao
- Algoritmos de caminho mais curto (\*)
- ...

**Demonstrações** são foco da nossa disciplina

**Porque?**

Raciocinar de forma precisa/sem ambiguidades

Certificar que determinado algoritmo **realmente funciona**

- Algoritmos de criptografia
- Algoritmos de ordenacao
- Algoritmos de caminho mais curto (\*)
- ...

(Em *Analise de Algoritmos* utilizaremos para analisar o **quão “rápido”** é um algoritmo)



- O primeiro passo para a resolução de um problema é defini-lo correta e precisamente. A **formulação** do problema envolve as seguintes questões:
  - ▶ *Qual o objeto (ou quais os objetos) em análise?*
  - ▶ *O que se deseja provar?*

- O primeiro passo para a resolução de um problema é defini-lo correta e precisamente. A **formulação** do problema envolve as seguintes questões:
  - ▶ *Qual o objeto (ou quais os objetos) em análise?*
  - ▶ *O que se deseja provar?*
- Hoje focaremos precisamente em como **formular** problemas
- (Na próxima aula falaremos de *demonstrações*)

- **Teorema:** resultado **verdadeiro** e provado

- **Teorema:** resultado **verdadeiro** e provado
- Um teorema é dividido em duas partes:
  - ▶ **Hipótese:** Apresenta as **informações** sobre o objeto de prova, o que **assumimos**. Essas informações são tomadas como verdadeiras
  - ▶ **Tese:** É a parte do teorema que **desejamos validar**, a partir da hipótese, utilizando uma sequência de argumentos formais.

Hipótese  $\Rightarrow$  Tese

# Teorema

**Ex:**

Teorema

*Seja  $n$  um número inteiro primo maior que 2. Então  $n$  é ímpar.*

*Hipotese* *Tese*

# Teorema

**Ex:**

Teorema

*Seja  $n$  um número inteiro primo maior que 2. Então  $n$  é ímpar.*

*Hipotese* *Tese*

Teorema

*Seja  $n$  um número inteiro. Se a soma dos dígitos de  $n$  é divisível por 3,*

*Hipotese*

*então  $n$  é divisível por 3*

*Tese*

**Obs:** Geralmente a hipótese é dada de forma **implícita**

**Ex:**

Teorema

*A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.*

**Obs:** Geralmente a hipótese é dada de forma **implícita**

**Ex:**

Teorema

*A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.*

(*Hipótese:* o objeto da prova é um triângulo; *Tese:* a soma de seus ângulos é 180 graus)



FYI: **Lema** e **Corolário** são Basicamente a mesma coisa que **Teorema**

(essas distinções não são importantes para nós)

# Proposição

- Uma **proposição** pode ser **falsa ou verdadeira**. Caso seja encontrada uma prova, ela se tornara um teorema

# Proposição

- Uma **proposição** pode ser **falsa ou verdadeira**. Caso seja encontrada uma prova, ela se tornara um teorema

## Proposição

*Tudo numero múltiplo de 4 é múltiplo de 3*

## Proposição

*Existem infinitas de triplas de naturais  $(x, y, z)$  tais que  $x^2 + y^2 = z^2$*

## Proposição

*O algoritmo Heapsort realiza no máximo  $5n \log n$  comparações para ordenar uma lista de  $n$  números*

# Definições

- **Definição** é a enumeração das propriedades de um determinado objeto (ou coleção de objetos)

## Definição (Primo)

Um natural  $p$  é **primo** se e somente se

Objeto

for divisível por exatamente dois números inteiros: 1 e  $p$ .

Propriedades

# Definições

- **Definição** é a enumeração das propriedades de um determinado objeto (ou coleção de objetos)

## Definição (Primo)

Um natural  $p$  é **primo** se e somente se

Objeto

for divisível por exatamente dois números inteiros: 1 e  $p$ .

Propriedades

## Definição (Módulo)

O **módulo**  $|r|$  de um número real  $r$  é igual a  $r$  se  $r \geq 0$ , e igual a  $-r$  se  $r < 0$

# Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.

# Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.
- As vezes o mesmo objeto recebe duas **diferentes definições**. Quando isso ocorre, é **necessário provar** que as definições **se equivalem**.

# Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.
- As vezes o mesmo objeto recebe duas **diferentes definições**. Quando isso ocorre, é **necessário provar** que as definições **se equivalem**.

**Ex:**

## Definição

*Uma **árvore** é um grafo conexo cujo número de arestas é igual ao número de nós menos 1*

## Definição

*Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos*



# Quantificadores

**Pergunta:** O seguinte teorema é “interessante”? **Porque** nao/sim?

Teorema

*O número 5 é primo.*

**Pergunta:** O seguinte teorema é “interessante”? **Porque** nao/sim?

Teorema

*O número 5 é primo.*

Não é muito interessante: fala apenas de **um número específico**

Para falarmos de **múltiplos** objetos, precisamos de **quantificadores**

# Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador “**todo**” é representado por  $\forall$ , e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador “**existe**” é denotado por  $\exists$

# Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador “**todo**” é representado por  $\forall$ , e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador “**existe**” é denotado por  $\exists$
  
- **Obs:** Geralmente utilizamos quantificadores para elementos dentro de uma **coleção específica** de objetos
- **Ex:** “*para todo número inteiro ...*”; “*existe uma função ...*”

# Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador “**todo**” é representado por  $\forall$ , e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador “**existe**” é denotado por  $\exists$
  
- **Obs:** Geralmente utilizamos quantificadores para elementos dentro de uma **coleção específica** de objetos
- **Ex:** “*para todo número inteiro ...*”; “*existe uma função ...*”

## Proposição

*Todo número primo maior do que 2 é ímpar*

## Proposição

*Para todo número par  $n$ , existe número natural  $k$  tal que  $n = 2k$*

# Negação

**Negação:** Frequentemente precisamos encontrar a **negação** de uma proposição (utilizamos “ $\neg$ ” para denotar negação)

Todo mundo gosta de sorvete  $\xrightarrow{\text{negação}}$  Nem todo mundo gosta de sorvete  
Tem gente que não gosta de sorvete

Fundamental entender como negação interage com quantificadores, **E**, **OU**, **implica**

## Negacao do “E”:

Marco é jovem **E** bonito  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Não é verdade que Marco é ambos jovem **E** bonito  
Marco é velho **OU** feio



## Negação do “E”:

Marco é jovem **E** bonito  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Não é verdade que Marco é ambos jovem **E** bonito  
Marco é velho **OU** feio

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \mathbf{E} B \xRightarrow{\text{negação}}$$

## Negação do “E”:

Marco é jovem **E** bonito  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Não é verdade que Marco é ambos jovem **E** bonito  
Marco é velho **OU** feio

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \mathbf{E} B \xRightarrow{\text{negação}} (\neg A) \mathbf{OU} (\neg B)$$

## Negação do “OU”:

Hoje é terça **O**U quarta  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Não é verdade que hoje é terça ou quarta  
Hoje não é terça **E** não é quarta

## Negação do “OU”:

Hoje é terça **O**U quarta  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Não é verdade que hoje é terça ou quarta  
Hoje não é terça **E** não é quarta

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \text{ OU } B \xRightarrow{\text{negação}}$$

## Negação do “OU”:

Hoje é terça **OU** quarta  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Não é verdade que hoje é terça ou quarta  
Hoje não é terça **E** não é quarta

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \text{ OU } B \xRightarrow{\text{negação}} (\neg A) \text{ E } (\neg B)$$

## Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Nem todo mundo gosta de sorvete  
Tem gente que não gosta de sorvete

# Negação

## Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Nem todo mundo gosta de sorvete  
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro  $n$ ,  $n$  é par  $\xRightarrow{\text{negação}}$

# Negação

## Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Nem todo mundo gosta de sorvete  
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro  $n$ ,  $n$  é par  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Existe inteiro  $n$  que não é par



# Negação

## Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Nem todo mundo gosta de sorvete  
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro  $n$ ,  $n$  é par  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Existe inteiro  $n$  que não é par

Casos particulares da regra geral:

$$\forall x, \text{expressao}(x) \xRightarrow{\text{negação}}$$

# Negação

## Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete  $\xrightarrow{\text{negação}}$  Nem todo mundo gosta de sorvete  
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro  $n$ ,  $n$  é par  $\xrightarrow{\text{negação}}$  Existe inteiro  $n$  que não é par

Casos particulares da regra geral:

$$\forall x, \text{expressao}(x) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, \neg \text{expressao}(x)$$

## Negação do “Para todo”:

Todo mundo gosta de sorvete  $\xrightarrow{\text{negação}}$  Nem todo mundo gosta de sorvete  
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro  $n$ ,  $n$  é par  $\xrightarrow{\text{negação}}$  Existe inteiro  $n$  que não é par

Casos particulares da regra geral:

$$\forall x, \text{expressao}(x) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, \neg \text{expressao}(x)$$

**Porque?** “Para todo” é simplesmente um **E** gigantesco e  
“Existe” é simplesmente um **OU** gigantesco

## Negação do “Existe”:

Existem pessoas com  $> 3$  metros  $\xRightarrow{\text{negação}}$  Não existem pessoas com  $> 3$  metros  
Todo mundo tem  $\leq 3$  metros

## Negação do “Existe”:

Existem pessoas com  $> 3$  metros  $\xrightarrow{\text{negação}}$  Não existem pessoas com  $> 3$  metros  
Todo mundo tem  $\leq 3$  metros

Caso particular da regra geral:

$$\exists x, \text{expressao}(x) \xrightarrow{\text{negação}}$$

## Negação do “Existe”:

Existem pessoas com  $> 3$  metros  $\xrightarrow{\text{negação}}$  Não existem pessoas com  $> 3$  metros  
Todo mundo tem  $\leq 3$  metros

Caso particular da regra geral:

$$\exists x, \text{expressao}(x) \xrightarrow{\text{negação}} \forall x, \neg \text{expressao}(x)$$

## Negação do “Existe”:

Existem pessoas com  $> 3$  metros  $\xrightarrow{\text{negação}}$  Não existem pessoas com  $> 3$  metros  
Todo mundo tem  $\leq 3$  metros

Caso particular da regra geral:

$$\exists x, \text{expressao}(x) \xrightarrow{\text{negação}} \forall x, \neg \text{expressao}(x)$$

**Porque?** “Para todo” é simplesmente um **E** gigantesco e  
“Existe” é simplesmente um **OU** gigantesco

# Negação

**Pergunta:** Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

*Para todo* numero par  $n$ , **existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$



# Negação

**Pergunta:** Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

*Para todo* numero par  $n$ , **existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$

Proposição (negacao)

**Existe** numero par  $n$ , tal que **pra todo** numero natural  $k$ ,  $n \neq 2k$

# Negação

**Pergunta:** Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

*Para todo* numero par  $n$ , **existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$

Proposição (negacao)

**Existe** numero par  $n$ , tal que **pra todo** numero natural  $k$ ,  $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

①  $\neg$  [Para todo numero par  $n$ , existe numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$ ]

# Negação

**Pergunta:** Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

*Para todo* numero par  $n$ , **existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$

Proposição (negacao)

**Existe** numero par  $n$ , tal que **pra todo** numero natural  $k$ ,  $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

- 1  $\neg$  [**Para todo** numero par  $n$ , **existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$ ]
- 2 **Existe** numero par  $n$  tal que  $\neg$  [**existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$ ]

# Negação

**Pergunta:** Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

*Para todo* numero par  $n$ , **existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$

Proposição (negacao)

**Existe** numero par  $n$ , tal que **pra todo** numero natural  $k$ ,  $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

- 1  $\neg$  [**Para todo** numero par  $n$ , **existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$ ]
- 2 **Existe** numero par  $n$  tal que  $\neg$  [**existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$ ]
- 3 **Existe** numero par  $n$  tal que **para todo** numero natural  $k$ ,  $\neg[n = 2k]$

**Pergunta:** Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

*Para todo* numero par  $n$ , **existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$

Proposição (negacao)

**Existe** numero par  $n$ , tal que **pra todo** numero natural  $k$ ,  $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

- 1  $\neg$  [**Para todo** numero par  $n$ , **existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$ ]
- 2 **Existe** numero par  $n$  tal que  $\neg$  [**existe** numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$ ]
- 3 **Existe** numero par  $n$  tal que **para todo** numero natural  $k$ ,  $\neg[n = 2k]$
- 4 **Existe** numero par  $n$  tal que **para todo** numero natural  $k$ ,  $n \neq 2k$

**Observação:** Note que as **classes dos objetos** não mudam, só os quantificadores

- ❶  $\neg$  [Para todo numero par  $n$ , existe numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$ ]
- ❷ **Existe** numero par  $n$  tal que  $\neg$  [existe numero natural  $k$  tal que  $n = 2k$ ]
- ❸ **Existe** numero par  $n$  tal que **para todo** numero natural  $k$ ,  $\neg[n = 2k]$
- ❹ **Existe** numero par  $n$  tal que **para todo** numero natural  $k$ ,  $n \neq 2k$

## Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

negação  
→

Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

## Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$  Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}}$$



## Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$  Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, expr_1(x) \mathbf{E} (\neg expr_2(x))$$

## Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$  Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, expr_1(x) \mathbf{E} (\neg expr_2(x))$$

**Pq?** “Para todo + se” é só um “para todo” com universo restrito:

$$\forall x \text{ que satisfaz } expr_1(x), \text{ satisfaz } expr_2(x) \\ \xrightarrow{\text{negação}}$$

## Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$  Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, expr_1(x) \mathbf{E} (\neg expr_2(x))$$

**Pq?** “Para todo + se” é só um “para todo” com universo restrito:

$$\forall x \text{ que satisfaz } expr_1(x), \text{ satisfaz } expr_2(x) \\ \xrightarrow{\text{negação}} \exists x \text{ que satisfaz } expr_1(x), \text{ satisfazendo } (\neg expr_2(x))$$

**Porque negacao:** Importante para **provar/desprovar** proposicao:  
basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

# Quantificadores

**Porque negacao:** Importante para **provar/desprovar** proposicao: basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

**Exemplo bobo:** A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

*Todo numero primo maior que 2 é **par***

# Quantificadores

**Porque negacao:** Importante para **provar/desprovar** proposicao: basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

**Exemplo bobo:** A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

*Todo numero primo maior que 2 é **par***

**Resposta:** É **falsa**: 3 é primo maior que 2 e não é par

**Porque negacao:** Importante para **provar/desprovar** proposicao: basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

**Exemplo bobo:** A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

*Todo numero primo maior que 2 é **par***

**Resposta:** É **falsa**: 3 é primo maior que 2 e não é par

O que voce acabou de mostrar é que a **negacao** da proposicao é **verdadeira** (entao a proposicao é **falsa**)

# Quantificadores

**Porque negacao:** Importante para **provar/desprovar** proposicao: basta **desprovar/provar** negacao. Outra perspectiva.

**Exemplo bobo:** A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

*Todo numero primo maior que 2 é **par***

**Resposta:** É **falsa**: 3 é primo maior que 2 e não é par

O que voce acabou de mostrar é que a **negacao** da proposicao é **verdadeira** (entao a proposicao é **falsa**)

Proposição (negacao)

***Existe** numero primo maior que 2 que é **impar***



# Exercícios

- **Exercício 1** - Seja  $I$  um intervalo, e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Reescreva as seguintes proposições utilizando quantificadores:
  - A função  $f$  atinge o valor zero
  - A função  $f$  é constante
  - A função  $f$  não é constante (*sem usar negação*)

- **Exercício 2** - Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Negue as seguintes proposições:
  - a-  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ .
  - b-  $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$ .
  - c- Para todo número natural  $n$ , se  $n$  é par então  $n^2$  é par

- **Exercício 3** - Determine se cada proposicao é verdadeira ou falsa ( $\mathbb{R}^*$  denota o conjunto  $\mathbb{R}$  com o 0 excluido)

a  $\exists a \in \mathbb{R}^*, \forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon$

b  $\forall \epsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}^*, |a| < \epsilon$

c  $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$

d  $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$

e  $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$