Estruturas Discretas

Marco Molinaro

Conteúdo

Conceitos Básicos para Demonstrações

Motivação

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Motivação

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Porque?

Motivação

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Porque?

Raciocinar de forma precisa/sem ambiguidades

Motivação

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Porque?

Raciocinar de forma precisa/sem ambiguidades

Certificar que determinado algoritmo realmente funciona

- Algoritmos de criptografia
- Algoritmos de ordenacao
- Algoritmos de caminho mais curto (*)
- ...

Motivação

Demonstrações são foco da nossa disciplina

Porque?

Raciocinar de forma precisa/sem ambiguidades

Certificar que determinado algoritmo realmente funciona

- Algoritmos de criptografia
- Algoritmos de ordenacao
- Algoritmos de caminho mais curto (*)
- ...

(Em *Analise de Algoritmos* utilizaremos para analisar o quão "rápido" é um algoritmo)

Formulação

- O primeiro passo para a resolução de um problema é defini-lo correta e precisamente. A formulação do problema envolve as seguintes questões:
  - *Qual o objeto (ou quais os objetos) em análise?*
  - *O que se deseja provar?*

Formulação

- O primeiro passo para a resolução de um problema é defini-lo correta e precisamente. A formulação do problema envolve as seguintes questões:
  - *Qual o objeto (ou quais os objetos) em análise?*
  - *O que se deseja provar?*

- Hoje focaremos precisamente em como formular problemas

- (Na próxima aula falaremos de *demonstrações*)

Teorema

- **Teorema:** resultado verdadeiro e provado

Teorema

- **Teorema:** resultado verdadeiro e provado
- Um teorema é dividido em duas partes:
  - **Hipótese:** Apresenta as informações sobre o objeto de prova, o que assumimos. Essas informações são tomadas como verdadeiras
  - **Tese:** E a parte do teorema que desejamos validar, a partir da hipótese, utilizando uma sequencia de argumentos formais.

$$\text{Hipótese} \Rightarrow \text{Tese}$$

Teorema

Ex:

Teorema

$$\underbrace{Seja\ n\ um\ número\ inteiro\ primo\ maior\ que\ 2.}_{Hipotese} Então\ \underbrace{n\ é\ ímpar.}_{Tese}$$

Teorema

Ex:

Teorema

$$\underbrace{\textit{Seja } n \textit{ um número inteiro primo maior que } 2.}_{Hipotese} \textit{ Então } \underbrace{n \textit{ é ímpar.}}_{Tese}$$

Teorema

$$\underbrace{\textit{Seja } n \textit{ um número inteiro. Se a soma dos digitos de } n \textit{ é divisivel por 3,}}_{Hipotese}$$

$$\textit{então } \underbrace{n \textit{ é divisivel por 3}}_{Tese}$$

Teorema

Obs: Geralmente a hipotese é dada de forma implicita

Ex:

Teorema

A soma dos ângulos internos de um triangulo é 180 graus.

Teorema

Obs: Geralmente a hipotese é dada de forma implicita

Ex:

Teorema

A soma dos ângulos internos de um triangulo é 180 graus.

(*Hipotese:* o objeto da prova é um triangulo; *Tese:* a soma de seus angulos é 180 graus)

Lema e Corolário

FYI: **Lema** e **Corolário** são Basicamente a mesma coisa que **Teorema**

(essas distinções não são importantes para nós)

Proposição

- Uma **proposição** pode ser falsa ou verdadeira. Caso seja encontrada uma prova, ela se tornara um teorema

Proposição

- Uma **proposição** pode ser falsa ou verdadeira. Caso seja encontrada uma prova, ela se tornara um teorema

Proposição

Tudo numero múltiplo de 4 é múltiplo de 3

Proposição

Existem infinitas de triplas de naturais (x, y, z) *tais que* $x^2 + y^2 = z^2$

Proposição

O algoritmo Heapsort realiza no máximo $5n \log n$ *comparações para ordenar uma lista de* n *números*

Definições

- **Definição** é a enumeração das propriedades de um determinado objeto (ou coleção de objetos)

Definição (Primo)

Um natural p é $\underbrace{\textbf{\textit{primo}}}_{\textit{Objeto}}$ se e somente se

for $\underbrace{\text{divisível por exatamente dois números inteiros: } 1 \text{ e } p.}_{\textit{Propriedades}}$

Definições

- **Definição** é a enumeração das propriedades de um determinado objeto (ou coleção de objetos)

Definição (Primo)

Um natural p é $\underbrace{\textbf{\textit{primo}}}_{\textit{Objeto}}$ se e somente se

for $\underbrace{\textit{divisível por exatamente dois números inteiros: } 1 \textit{ e } p.}_{\textit{Propriedades}}$

Definição (Módulo)

*O **módulo** $|r|$ de um número real r é igual a r se $r \geq 0$, e igual a $-r$ se $r < 0$*

Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.

Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.

- As vezes o mesmo objeto recebe duas diferentes definições. Quando isso ocorre, é necessário provar que as definições se equivalem.

Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.

- As vezes o mesmo objeto recebe duas diferentes definições. Quando isso ocorre, é necessário provar que as definições se equivalem.

Ex:

Definição

*Uma **árvore** é um grafo conexo cujo número de arestas é igual ao número de nós menos 1*

Definição

*Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos*

Quantificadores

Quantificadores

Pergunta: O seguinte teorema é "interessante"? Porque nao/sim?

Teorema

O número 5 é primo.

Quantificadores

Pergunta: O seguinte teorema é "interessante"? Porque nao/sim?

Teorema

O número 5 é primo.

Não é muito interessante: fala apenas de um número específico

Para falarmos de múltiplos objetos, precisamos de quantificadores

Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador "**todo**" é representado por $\forall$, e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador "**existe**" é denotado por $\exists$

Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador “**todo**” é representado por $\forall$, e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador “**existe**” é denotado por $\exists$

- **Obs:** Geralmente utilizamos quantificadores para elementos dentro de uma coleção espcífica de objetos
- **Ex:** “*para todo* número inteiro ...”; “*existe* uma função ...”

Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador "**todo**" é representado por $\forall$, e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador "**existe**" é denotado por $\exists$

- **Obs:** Geralmente utilizamos quantificadores para elementos dentro de uma coleção espcífica de objetos
- **Ex:** "*para todo* número inteiro ..."; "*existe* uma função ..."

Proposição

Todo *numero primo maior do que 2 é impar*

Proposição

Para todo *numero par n,* ***existe*** *numero natural k tal que $n = 2k$*

Negação

Negação: Frequentemente precisamos encontrar a **negação** de uma proposicao (utilizamos "$\neg$" para denotar negação)

Todo mundo gosta de sorvete $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Nem todo mundo gosta de sorvete
Tem gente que não gosta de sorvete

Fundamental entender como negação interage com quantificadores, **E**, **OU**, **implica**

Negação

Negacao do "E":

Marco é jovem **E** bonito $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não é verdade que Marco é ambos jovem **E** bonito

Marco é velho **OU** feio

Negação

Negacao do "E":

Marco é jovem **E** bonito $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não é verdade que Marco é ambos jovem **E** bonito

Marco é velho **OU** feio

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \;\mathbf{E}\; B \overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$$

Negação

Negacao do "E":

Marco é jovem **E** bonito $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não é verdade que Marco é ambos jovem **E** bonito

Marco é velho **OU** feio

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \ \mathbf{E} \ B \overset{\text{negação}}{\Longrightarrow} (\neg A) \ \mathbf{OU} \ (\neg B)$$

Negação

Negação do "OU":

Hoje é terça **OU** quarta $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não é verdade que hoje é terça ou quarta

Hoje não é terça **E** não é quarta

Negação

Negação do "OU":

Hoje é terça **OU** quarta $\stackrel{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não é verdade que hoje é terça ou quarta

Hoje não é terça **E** não é quarta

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \textbf{ OU } B \stackrel{\text{negação}}{\Longrightarrow}$$

Negação do “OU”:

Hoje é terça **OU** quarta $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não é verdade que hoje é terça ou quarta

Hoje não é terça **E** não é quarta

Isso é caso particular da regra geral:

$$A \ \mathbf{OU} \ B \overset{\text{negação}}{\Longrightarrow} (\neg A) \ \mathbf{E} \ (\neg B)$$

Negação do "Para todo":

Todo mundo gosta de sorvete $\xRightarrow{\text{negação}}$ Nem todo mundo gosta de sorvete

Tem gente que não gosta de sorvete

Negação

Negação do "Para todo":

Todo mundo gosta de sorvete $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Nem todo mundo gosta de sorvete

Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n, n é par $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$

Negação

Negação do "Para todo":

Todo mundo gosta de sorvete $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Nem todo mundo gosta de sorvete

Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n, n é par $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Existe inteiro n que não é par

Negação

Negação do "Para todo":

Todo mundo gosta de sorvete $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Nem todo mundo gosta de sorvete

Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n, n é par $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Existe inteiro n que não é par

Casos particulares da regra geral:

$$\forall x, \textbf{expressao}(x) \overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$$

Negação

Negação do "Para todo":

Todo mundo gosta de sorvete $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Nem todo mundo gosta de sorvete

Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n, n é par $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Existe inteiro n que não é par

Casos particulares da regra geral:

$$\forall x, \mathbf{expressao}(x) \overset{\text{negação}}{\Longrightarrow} \exists x, \neg\mathbf{expressao}(x)$$

Negação

Negação do "Para todo":

Todo mundo gosta de sorvete $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Nem todo mundo gosta de sorvete
Tem gente que não gosta de sorvete

Para todo inteiro n, n é par $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Existe inteiro n que não é par

Casos particulares da regra geral:

$$\forall x, \textbf{expressao}(x) \overset{\text{negação}}{\Longrightarrow} \exists x, \neg\textbf{expressao}(x)$$

Porque? **"Para todo"** é simplesmente um **E** gigantesco e
"Existe" é simplesmente um **OU** gigantesco

Negação

Negação do "Existe":

Existem pessoas com > 3 metros $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não existem pessoas com > 3 metros

Todo mundo tem ≤ 3 metros

Negação

Negação do "Existe":

Existem pessoas com > 3 metros $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não existem pessoas com > 3 metros

Todo mundo tem ≤ 3 metros

Caso particular da regra geral:

$$\exists x, \textbf{expressao}(x) \overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$$

Negação

Negação do "Existe":

Existem pessoas com > 3 metros $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não existem pessoas com > 3 metros

Todo mundo tem ≤ 3 metros

Caso particular da regra geral:

$$\exists x, \mathbf{expressao}(x) \overset{\text{negação}}{\Longrightarrow} \forall x, \neg\mathbf{expressao}(x)$$

Negação

Negação do "Existe":

Existem pessoas com > 3 metros $\overset{\text{negação}}{\Longrightarrow}$ Não existem pessoas com > 3 metros

Todo mundo tem ≤ 3 metros

Caso particular da regra geral:

$$\exists x, \mathbf{expressao}(x) \overset{\text{negação}}{\Longrightarrow} \forall x, \neg \mathbf{expressao}(x)$$

Porque? "Para todo" é simplesmente um **E** gigantesco e
"Existe" é simplesmente um **OU** gigantesco

Negações:

1) A E B $\overset{neg}{\rightsquigarrow}$ $(\neg A)$ OU $(\neg B)$

2) A OU B $\overset{neg}{\rightsquigarrow}$ $(\neg A)$ E $(\neg B)$

num int / num par

3) $\forall x$, $expr(x)$ $\overset{neg}{\rightsquigarrow}$ $\exists x$, $(\neg\, expr(x))$

4) $\exists x$, $expr(x)$ $\overset{neg}{\rightsquigarrow}$ $\forall x$, $(\neg\, expr(x))$

Ex:

a) Para todo $x \leq 10$, $\underbrace{x^2 \text{ é ímpar}}_{expr(x)}$

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe *numero par* n, *tal que* ***pra todo*** *numero natural* k, $n \neq 2k$

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo *numero par* n*,* ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe *numero par* n*, tal que* ***pra todo*** *numero natural* k*,* $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

1. $\neg$ [**Para todo** numero par n, **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe *numero par* n, *tal que* ***pra todo*** *numero natural* k, $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

1. $\neg$ [**Para todo** numero par n, **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
2. **Existe** numero par n tal que $\neg$ [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe *numero par* n, *tal que* ***pra todo*** *numero natural* k, $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

1. $\neg$ [**Para todo** numero par n, **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
2. **Existe** numero par n tal que $\neg$ [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
3. **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k, $\neg[n = 2k]$

Negação

Pergunta: Negação quando tem múltiplos quantificadores??

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Neg

Proposição (negacao)

Existe *numero par* n, *tal que* ***pra todo*** *numero natural* k, $n \neq 2k$

Aplicando várias vezes o que sabemos ate simplificar a negação:

1. $\neg$ [**Para todo** numero par n, **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
2. **Existe** numero par n tal que $\neg$ [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
3. **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k, $\neg[n = 2k]$
4. **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k, $n \neq 2k$

Negação

Observação: Note que as classes dos objetos não mudam, só os quantificadores

1. $\neg$ [**Para todo** numero par n, **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
2. **Existe** numero par n tal que $\neg$ [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
3. **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k, $\neg[n = 2k]$
4. **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k, $n \neq 2k$

Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$ Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Negação

Negação do "para todo" + "se/então":

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$ Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}}$$

Negação

Negação do "para todo" + "se/então":

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros
$\xrightarrow{\text{negação}}$ Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, expr_1(x) \ \mathbf{E} \ (\neg expr_2(x))$$

Negação

Negação do “para todo” + “se/então”:

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$ Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x,\ expr_1(x)\ \mathbf{E}\ (\neg expr_2(x))$$

Pq? “Para todo + se” é só um **“para todo”** com universo restrito:

$\forall x$ que satisfaz $expr_1(x)$, satisfaz $expr_2(x)$

$\xrightarrow{\text{negação}}$

Negação do "para todo" + "se/então":

Para todas as pessoas, **se** a pessoa é brasileira, **então** seus pais são brasileiros

$\xrightarrow{\text{negação}}$ Existem pessoas que são brasileiras mas seus pais não são brasileiros

Isso é caso particular da regra geral:

$$\forall x, (expr_1(x) \Rightarrow expr_2(x)) \xrightarrow{\text{negação}} \exists x, expr_1(x) \ \mathbf{E} \ (\neg expr_2(x))$$

Pq? "Para todo + se" é só um **"para todo"** com universo restrito:

$\forall x$ que satisfaz $expr_1(x)$, satisfaz $expr_2(x)$

$\xrightarrow{\text{negação}}$ $\exists x$ que satisfaz $expr_1(x)$, satisfazendo $(\neg expr_2(x))$

Quantificadores

Porque negacao: Importante para provar/desprovar proposicao: basta desprovar/provar negacao. Outra perspectiva.

Quantificadores

Porque negacao: Importante para provar/desprovar proposicao: basta desprovar/provar negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

Todo *numero primo maior que 2 é par*

Quantificadores

Porque negacao: Importante para provar/desprovar proposicao: basta desprovar/provar negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

Todo *numero primo maior que 2 é par*

Resposta: É falsa: 3 é primo maior que 2 e não é par

Quantificadores

Porque negacao: Importante para provar/desprovar proposicao: basta desprovar/provar negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

Todo *numero primo maior que 2 é par*

Resposta: É falsa: 3 é primo maior que 2 e não é par

O que voce acabou de mostrar é que a negacao da proposicao é verdadeira (entao a proposicao é falsa)

Quantificadores

Porque negacao: Importante para provar/desprovar proposicao: basta desprovar/provar negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

Todo *numero primo maior que 2 é par*

Resposta: É falsa: 3 é primo maior que 2 e não é par

O que voce acabou de mostrar é que a negacao da proposicao é verdadeira (entao a proposicao é falsa)

Proposição (negacao)

Existe *numero primo maior que 2 que é impar*

Exercícios

Exercícios

- **Exercício 1 -** Seja I um intervalo, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Reescreva as seguintes proposições utilizando quantificadores:
  - a - A função f atinge o valor zero
  - b - A função f é constante
  - c - A função f não é constante (*sem usar negacao*)

- **Exercício 2 -** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Negue as seguintes proposições:
  - a - $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$
  - b - $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M.$
  - c - Para todo número natural n, se n é par então n^2 é par

Exercícios

- **Exercício 3 -** Determine se cada proposicao é verdadeira ou falsa ($\mathbb{R}^*$ denota o conjunto $\mathbb{R}$ com o 0 excluido)

  a - $\exists a \in \mathbb{R}^*, \forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon$

  b - $\forall \epsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}^*, |a| < \epsilon$

  c - $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

  d - $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

  e - $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$