Lista preparação para P2

1) Como vimos anteriormente, um grafo (não-direcionado) **bipartido** é um onde os nós estão divididos em dois conjuntos A e B e todas as arestas tem uma ponta em A e a outra em B.

   Quantas aresta no maximo pode ter um grafo bipartido com *n* nós no lado A e *m* nós no lado B?

2) Prove por inducao no **número de nós** que para qualque grafo simples, a soma dos graus de todos os nós é igual a 2 vezes o número de arestas (provamos isso em aula usando indução no número de arestas).

3) Prove que um grafo não-direcionado simples conexo que tem 1 nó de grau 1 (“folha”) e todos os outros tem grau pelo menos 2 sempre tem ciclo

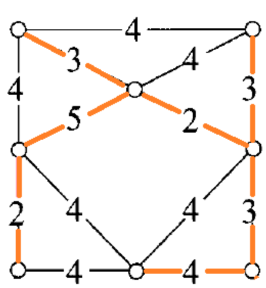
   Dica: Tente usar uma modificacao de prova que “todo grafo onde os nós tem grau >= 2 tem ciclo”

4) Considere um grafo G não-direcionado com n nós onde todo nó tem grau pelo menos (n+1)/2. Mostre que para todo par de nó u,v, existe um caminho em G entre eles com no máximo 2 arestas

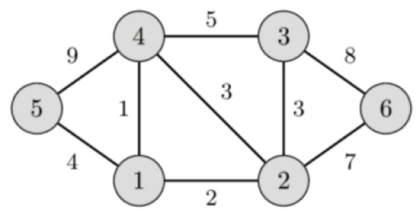
   Dica: Se existe tal caminho, o que voce pode dizer sobre os vizinhos de u e de v?

5) Considere uma árvore T, e o maior caminho nessa árvore. Sejam u e v os nós que são as pontas desse caminho. Mostre que u e v são folhas

6) A árvore abaixo é uma árvore geradora mínima? Justifique



Exercício 1: Compute a arvore geradora mínima para o grafo abaixo



Exercício 2: Responda:

a) Um grafo só tem uma árvore geradora mínima?

b) Considere um grafo conexo com n nós onde cada aresta tem custo 1. Podemos determinar o custo da sua AGM?

c) A aresta mais cara do grafo nunca está na sua AGM? Sempre está? Justifique

9) Considere o grafo G não direcionado abaixo. Suponha que o grafo G tenha um trajeto Euleriano. Prove que:

a) Esse trajeto é aberto, ou seja, começa e termina em nós diferentes

b) Os subgrafos G1 e G2 ambos tem trajeto Euleriano

10) Considere um grafo nao-direcionado conexo G. Suponha que G tem exatamente 4 nós de grau impar. Mostre que G tem 2 trajetos P1 e P2 que coletivamente passam exatamente 1 vez por cada arestas do grafo.

Dica: Lembre como provamos que se G tem 2 nós de grau impar, então tem um trajeto (Euleriano) passando por todas as arestas)