

# Lista preparação para P2

1) Grafo:  $\sum d(u) = 2 \times \#arestas$   
 Hadwiger (grafo)  
 2) Pense em caminhos, ciclos (ex:  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_n$ )  
 $\rightarrow$  ciclos

1) Como vimos anteriormente, um grafo (não-direcionado) **bipartido** é um onde os nós estão divididos em dois conjuntos A e B e todas as arestas tem uma ponta em A e a outra em B.

Quantas aresta no maximo pode ter um grafo bipartido com  $n$  nós no lado A e  $m$  nós no lado B?

3) Comp. Contro

2) Prove por inducao no **número de nós** que para qualquer grafo simples, a soma dos graus de todos os nós é igual a 2 vezes o número de arestas (provamos isso em aula usando indução no número de arestas).

4) Arestas (ex:  $\#arestas = \frac{\sum d(u)}{2}$ )  
 (ex: usar  $\#$  folhas)

3) Prove que um grafo não-direcionado simples conexo que tem 1 nó de grau 1 ("folha") e todos os outros tem grau pelo menos 2 sempre tem ciclo

5) Arvore geradora min (ex: ciclo)

**Dica:** Tente usar uma modificacao de prova que "todo grafo onde os nós tem grau  $\geq 2$  tem ciclo"

6) Teorema Euleriano

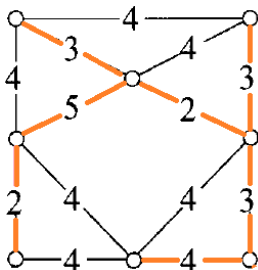
4) Considere um grafo G não-direcionado com  $n$  nós onde todo nó tem grau pelo menos  $(n+1)/2$ . Mostre que para todo par de nó,  $u, v$ , existe um caminho em G entre eles com no máximo 2 arestas

7) Grafos direcionados + pares (ex: inducao, caminho vai longe)

**Dica:** Se existe tal caminho, o que voce pode dizer sobre os vizinhos de  $u$  e de  $v$ ?

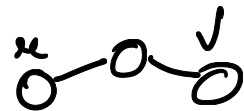
5) Considere uma árvore T, e o maior caminho nessa árvore. Sejam  $u$  e  $v$  os nós que são as pontas desse caminho. Mostre que  $u$  e  $v$  são folhas

6) A árvore abaixo é uma árvore geradora mínima? Justifique

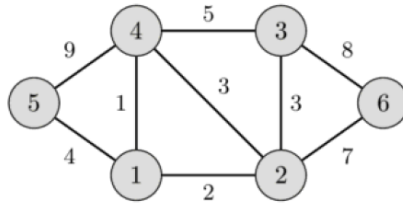


4)  $\forall u, v$  tem caminho tem  $\leq 2$  arestas

Prova: Pegue  $u,$



**Exercício 1:** Compute a árvore geradora mínima para o grafo abaixo



**Exercício 2:** Responda:

- a) Um grafo só tem **uma** árvore geradora mínima?
  - b) Considere um grafo conexo com  $n$  nós onde cada aresta tem custo 1. Podemos determinar o **custo da sua AGM**?
  - c) A aresta **mais cara** do grafo **nunca** está na sua AGM? **Sempre está?** Justifique
- 9) Considere o grafo  $G$  não direcionado abaixo. Suponha que o grafo  $G$  tenha um trajeto Euleriano. Prove que:



- a) Esse trajeto é aberto, ou seja, começa e termina em nós diferentes
  - b) Os subgrafos  $G_1$  e  $G_2$  ambos tem trajeto Euleriano
- 10) Considere um grafo não-direcionado conexo  $G$ . Suponha que  $G$  tem exatamente 4 nós de grau ímpar. Mostre que  $G$  tem 2 trajetos  $P_1$  e  $P_2$  que coletivamente passam exatamente 1 vez por cada aresta do grafo.

**Dica:** Lembre como provamos que se  $G$  tem 2 nós de grau ímpar, então tem um trajeto (Euleriano) passando por todas as arestas)