GABARITO DA LISTA DE INDUÇÃO
PROFESSOR: EDUARDO LABER

# 1 Indução Básica

1. Para $n_0 = 4$, temos $4! > 2^4$. Portanto $n = 4$ é a base da indução. Assuma por indução que $k! > 2^k$, para $k \geq 4$. Devemos provar para $k+1$. Temos que $(k+1)! = (k+1)k! > (k+1)2^k$, onde a última desigualdade segue da hipótese indutiva. Como, $k+1 > 2$, segue que $(k+1)! > (k+1)2^k > 2.2^k = 2^{k+1}$.

2.

3. a) Utilize a abordagem do exemplo 2 da parte de indução da apostila do curso

   b) **Base.** Para $n = 1$, $7^1 - 2^1 = 5$ que é múltiplo de 5.

   **Passo Indutivo.** Se $5|(7^k - 2^k)$ , então $5|(7^{k+1} - 2^{k+1})$

   **Hipótese Indutiva.** $5|(7^k - 2^k)$

   **Prova do Passo.**

   Devemos manipular algebricamente a expressão de modo a aparecer a hipótese indutiva.

$$7^{(k+1)} - 2^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k = (5+2) \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k = 5 \cdot 7^k + 2 \cdot (7^k - 2^k)$$

   Como $5|5 \cdot 7^k$ e como a hipótese indutiva garante que $5|2 \cdot (7^k - 2^k)$, temos que

$$5|(7^{k+1} - 2^{k+1})$$

4. a) Base $n = 1$. $q^0 + q^1 = 1 + q = \frac{q^2-1}{q-1}$.

   Hipótese. A propriedade vale para $k$

   Passo Indutivo. Provar para $k+1$ $\forall k \geq 1$.

Prova do Passo. $\sum_{i=1}^{k+1} q^i = \sum_{i=1}^{k} q^i + q^{k+1}$.

Como a hipótese de indução garante que $\sum_{i=1}^{k} q^i = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} q^i = \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} = \frac{q^{k+2}-1}{q-1}$$

b) O $i$-ésimo menor ímpar que é maior que 77 é $77+2i$. Portanto, devemos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} 77 + 2i = 78n + n^2$$

Para $i = 1$, o resultado vale já que $\sum_{i=1}^{1} 77 + 2i = 79 = 78 + 1^2$.

Hipótese. A propriedade vale para $k$

Passo Indutivo. Provar para $k+1$.

Prova do Passo.

$$\sum_{i=1}^{k+1} 77+2i = \sum_{i=1}^{k}(77+2i)+77+2(k+1) = 78k+k^2+77+2(k+1) = k^2+80k+79 = (k+1)^2+78(k+1)$$

5. O $j$-ésimo menor par positivo que deixa resta 1 na divisão por 3 é dado $6j-2$. Portanto, devemos mostrar que

$$\sum_{j=1}^{n} 6j - 2 = 3n^2 + n$$

.

Base. Para $n = 1$, o resultado é válido já que $\sum_{j=1}^{1} 6j - 2 = 4 = 3 \cdot 1^2 + 1$

Hipótese Indutiva. $\sum_{j=1}^{k} 6j - 2 = 3k^2 + k$

Prova do Passo.

$$\sum_{j=1}^{k+1} 6j - 2 = \sum_{j=1}^{k}(6j-2) + 6k + 4 = 3k^2 + k + 6k + 4 = 3(k+1)^2 + (k+1)$$

6. Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} i!$ e $P(n)$ a proposição: $S_n$ é um número ímpar $\forall n \geq 1$.

$$n = 1 \Longrightarrow S_1 = 1! = 1$$

$$n = 2 \Longrightarrow S_2 = S_1 + 2! = 3$$

Asumimos agora que a proposição $P(n)$ é verdadeira para $n = 2, ..., k$. Devemos mostrar que $P(n)$ continua verdadeira para $n = k + 1$, isto é, $S_{k+1}$ é um número ímpar. Temos que

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} i! = \sum_{i=1}^{k} i! + (k+1)! = S_k + (k+1)!$$

Como $S_k$ é um número ímpar(pela hipótese de indução) e $(k+1)! = 1.2...(k+1)$ é um número par, segue que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, concluímos que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 1$.

# 2 Indução e Recorrências

1. Base. $k = 1$. $T(1) = 1 > 1^2/2 = 0.5$.

   Hipótese. A propriedade vale para $k$

   Passo Indutivo. Provar para $k + 1$.

   Prova do Passo: $T(k + 1) = T(k) + k + 1$. Entretanto, segue da hipótese de indução que $T(k) > k^2/2$. Como $T(k+1) = T(k) + k + 1 > k^2/2 + k + 1$, basta então verificar que $k^2/2 + k + 1 > (k + 1)^2/2 = k^2/2 + k + 0.5$.

2. A prova e por indução em $n$.

   Base. Para $n = 1$ o resultado vale já que 1 é um termo da sequência de Fibonacci.

   **Passo indutivo.** Se todo número inteiro positivo menor ou igual a $k$, para $k \geq 1$, pode ser escrito como soma de termos distintos da sequência de Fibonacci então $k + 1$ também pode ser escrito como soma de termos distintos da sequência de Fibonacci

   **Prova do Passo.** Seja $F_j$ o maior número da sequênci de Fibonacci que é menor ou igual a $k + 1$. Temos que $k + 1 = F_j + (k + 1 - F_j)$ e temos que $0 \leq (k + 1 - F_j) \leq k$.

   Logo, por hipótese $(k + 1 - F_j)$ pode ser escrito como soma de termos distintos da sequência de Fibonacci.

   Para concluir a prova, entretanto, temos que mostrar que $F_j$ não é um dos termos da expansão de $(k + 1 - F_j)$ em termos de Fibonacci obtida pela hipótese de indução. Como $F_j$ é o maior termo da série de Fibonacci menor ou igual a $k + 1$ temos que $F_{j+1} = F_j + F_{j-1} > k + 1$, o que implica que $k + 1 - F_j < F_{j-1} \leq F_j$.

3. Defina $T(1) = \sqrt{2}$ e $T(k+1) = \sqrt{T(k)+2}$, para $k \geq 1$. Devemos provar que $T(n) \leq 2$ para $n \geq 1$. Para $n = 1$, o resultado vale. Assuma indutivamente que o resultado vale para $k$. Devemos então provar que o resultado continua válido para $k+1$. Temos da definição que $T(k+1) = \sqrt{T(k)+2}$. Como, por hipótese, $T(k) < 2$, segue que $T(k+1) < \sqrt{2+2} = 2$.

4.

5. Base. Se $n = 1$, apenas uma movimentação é feita. Como $1 = 2^1 - 1$, a base é satisfeita.

   Seja $T(k)$ o número de movimentações para $k$ discos.

   Hipótese Indutiva: $T(k) = 2^k - 1$

   Passo Indutivo. Provar que $T(k+1) = 2^{k+1} - 1 \ \forall k \geq 1$

   Prova do Passo. Ao ser chamado com parâmetro $k+1$ o procedimento MoveDisco realiza $2.T(k)+1$ movimentações, já que ele chama o procedimento com parâmetro $k$ duas vezes e além disso move um disco. Portanto,

$$T(k+1) = 2T(k) + 1$$

   Como $T(k) = 2^k - 1$, por hipótese, segue que $T(k+1) = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$.

6. a) 20 vezes

   b) $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ se $n \geq 3$ e $T(n) = 4$ se $n < 3$

   c) Para $n = 1$ e $n = 2$, o resultado é válido já que $T(1) = 4 \leq 4(7/4)^1 = 7$ e $T(2) = 4 \leq 4(7/4)^2 = 49/4$ Assuma como hipótese de indução que o resultado é válido para todo inteiro do conjunto $\{1, \ldots, k\}$ aonde $k$ é um inteiro maior ou igual a 2. Devemos provar que a propriedade é válida para $k+1$. Como $k+1 \geq 3$, temos que

$$T(k+1) = T(k) + T(k) \leq 4(7/4)^k + 4 \cdot (7/4)^{k-1} = 4(7/4)^{k-1}(7/4+1) = 11 \cdot (7/4)^{k-1} < 4 \cdot (7/4)^{k+1}$$

# 3 Indução Estrutural

1. Base. Se $n < 8$, o resultado é válido. De fato, basta colocar cada uma das $n$ pessoas em um grupo diferente.

Hipótese. A propriedade vale para qualquer grupo de $k$ pessoas, com $k \geq 7$, onde cada pessoa conhece no máximo 7

Passo Indutivo. Provar para $k + 1$, $\forall k \geq 7$.

Prova do Passo. Seja um conjunto de $k + 1$ pessoas. Por hipótese de indução, podemos dividir as primeiras $k$ pessoas em 8 grupos de modo que duas pessoas do mesmo grupo não se conheçam. Falta portanto atribuir um grupo para pessoa $k + 1$. Como esta conhece no máximo 7 pessoas e existem 8 grupos, logo existe um grupo $G$ em que ninguem a conhece. Atribuindo a pessoa $k + 1$ ao grupo $G$, provamos o passo indutivo.

2. **Base.** A árvore tem apenas um nó. Este nó, além de ser raíz da árvore, é também uma folha que tem nível 0. Como $2^0 = 1$, a base é válida.

   **Passo Indutivo.** Se para toda árvore estritamente binária com até $k$ nós a relação é válida então a relação também é válida para toda árvore estritamente binária com exatamente $k+1$ nós, para todo $k \geq 1$

   **Prova do Passo:** Seja $T$ uma árvore estritamente binária com $k + 1$ nós e sejam $l_1, \ldots, l_{k+1}$ os níveis das folhas desta árvore. Além disso, seja $r$ a raíz de $T$, $T_E$ a árvore a esquerda e $T_D$ a árvore a direita. Seja $e$ o número de folhas da árvore $T_E$ e seja (k+1-e) o número de folhas da árvore $T_D$. Finalmente, sejam $l_1^E, \ldots, l_e^E$ os níveis das folhas de $T_E$ e $l_1^D, \ldots, l_{k+1-e}^D$ os níveis das folhas de $T_D$. Como $T_E$ e $T_D$ são estritamente binárias com menos que $k + 1$ folhas, a hipótese vale para estas árvores, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{e} 2^{l_i^E} = 1$$

   e

$$\sum_{i=1}^{k+1-e} 2^{l_i^D} = 1$$

   Como as $e$ primeiras folhas de $T$ correspondem a $T_E$ e as demais a $T_D$, temos que $l_i = l_i^E + 1$ se $i \in \{1, \ldots, e\}$ e $l_i = l_{i-e}^D + 1$ se $i \in \{e + 1, \ldots, k + 1\}$. Note que a diferença de uma unidade no nível é devido a existência da raiz $r$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{l_i} = \sum_{i=1}^{e} 2^{l_i^E+1} + \sum_{i=e+1}^{k+1} 2^{l_i^D+1} = 2^{-1} + 2^{-1} = 1$$

3. (*). Para n=1, temos a lista $\{\emptyset\{1\}\}$. Para $n = 2$ temos a lista $\{\emptyset\{1\}\{1,2\}\{2\}\}$. Para $n = 3$ temos a lista $\{\emptyset\{1\}\{1,2\}\{2\}\{2,3\}\{1,2,3\}\{3\}\{3\}\}$.

   **Passo indutivo**. Se é possivel construir uma lista contendo todos os subconjuntos do conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$ tal que cada subconjunto da fila é obtido a partir do anterior pela remoção ou adição de um único elemento então é possivel construir uma lista contendo todos os subconjuntos do conjunto $\{1, 2, \ldots, k + 1\}$ tal que cada subconjunto da fila é obtido a partir do anterior pela remoção ou adição de um único elemento, para todo $k \geq 1$.

   **Prova do Passo**. Dada uma lista $L$, seja $L^{rev}$ a lista obtida listando os subconjuntos de $L$ do último para o primeiro. Além disso, dada uma lista $L$ seja $L + n$ a lista obtida adicionado $n$ a cada subconjunto da lista $L$.

   Seja $S$ a lista que satisfaz a propriedade para o conjunto $\{1, \ldots, k\}$ fornecida pela hipótese de indução. Portanto, a lista obtida concatenando $S$ e $S^{rev} + (k + 1)$ satisfaz a propriedade para $\{1, \ldots, k + 1\}$. De fato, note que: todo subconjunto de $\{1, \ldots, k + 1\}$ aparece exatamente uma vez nessa lista concatenada; as listas $S$ e $S^{rev} + (k + 1)$ satisfazem a propriedade de supressão/adição e o primeiro subconjunto de $S^{rev} + (k + 1)$ é obtido adicionando $k + 1$ ao último subconjunto de $S$.

4.

5.