Rio de Janeiro, 24 de Outubro de 2011.
LISTA DE ESTRUTURAS DISCRETAS
PROFESSOR: EDUARDO LABER
OBSERVAÇÕES: Exercícios marcados com $*$ são mais complicados.

1 Isomorfismo

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O complemento de G, denotado por $\overline{G}$, é o grafo simples com conjunto de vértices V e conjunto de arestas $\overline{E} = \{xy | x, y \in V \ e \ xy \notin E\}$. Um grafo simple é dito auto-complementar se for isomorfo a seu complementar.
   - Dê exemplo de um grafo simples, com 4 vértices, que seja auto complementar.
   - Dê exemplo de um grafo simples, com 5 vértices, que seja auto complementar.
   - Verifique que não há grafos auto complementares com 2 nem 3 vértices.
   - Quantas arestas deve ter um grafo auto complementar que possui n vértices ?
   - Demonstre que se G é um grafo auto complementar com n vértices, então ou $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$, onde k é um número inteiro positivo.
2. Exiba todos os grafos não-isomorfos simples com 4 vértices

2 Relação entre soma dos graus e número de arestas

1. Dado um grafo $G = (V, E)$, sejam $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o grau mínimo e máximo de G, respectivamente. Prove que
$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$
2. Mostre que um grafo simples com n vértices e mais de $\frac{n(n-2)}{2}$ arestas é conexo.
3. Utilizamos $\Delta(G)$ para denotar o grau do vértice de maior grau em G. Determine se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando.

   a) Para todo grafo simples $G = (V, E)$, $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$, onde $v \in V$.

   b) Para todo grafo simples $G = (V, E)$, $\Delta(G - v) < \Delta(G)$, onde v é o vértice de G com maior grau.

   c) Para todo grafo simples $G = (V, E)$, $\Delta(G - v) \geq \Delta(G) - 1$, onde $v \in V$.

4. Em uma festa com 100 convidados, houveram 2008 apertos de mão. Sabendo que nenhum par de pessoas se cumprimentou mais de uma vez, podemos afirmar que alguem apertou a mão de pelo menos 41 pessoas?

5. *Seja $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto de pontos no plano tal que a distância entre quaisquer dois pontos é pelo menos 1. Mostre que há no máximo $3n$ pares de pontos com distância exatamente 1.

3 Caminhos, Ciclos e Conexidade

1. Mostre que todo grafo conexo com n vértices e pelo menos n arestas tem um ciclo.

2. Mostre que se G é desconexo, então $\overline{G}$ (complemento de G) é conexo. Se necessário, veja a definição de grafo complementar no problema 1.

3. Sejam P_1 e P_2 os dois maiores caminhos em um grafo conexo G. Mostre que se $|P_1| = |P_2|$ então P_1 e P_2 tem um vértice em comum.

4. O diâmetro de um grafo G é a maior distância[1] entre dois vértices de um grafo. Mostre que se G tem diâmetro maior que 3, então $\overline{G}$ tem diâmetro menor que 3.

5. Mostre que se a aresta e pertence a um trajeto fechado em G, então e pertence a um ciclo de G.

6. *. Mostre que em uma festa com n pessoas, onde cada pessoa conhece pelo menos 3, é possível colocar formar uma roda com pelo menos 4 pessoas de modo que cada pessoa conheça seus dois vizinhos.

7. Uma ponte em um grafo conexo $G = (V, E)$ é uma aresta e tal $G - e$ não é conexo.

   a) Exiba um grafo conexo que contém uma ponte.

   b) Mostre que se uma aresta e não é uma ponte em um grafo conexo G, então existe um ciclo em G que contém e.

8. Uma cobertura por vértices para um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que toda aresta de G incide em pelo menos um vértice de C. Um conjunto independente para G é um conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que nenhum par de vértices de S é vizinho em G. Mostre que o conjunto X é uma cobertura para G se e somente se $V - X$ é um conjunto independente para G.

[1]consulte a definição de distância apresentada em sala de aula

4 Árvores

1. Prove que toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos dois vértices com grau 1.

2. Existe uma árvore com n vértices onde algum vértice tem grau $n-1$? Existe uma árvore com n vértices onde dois vértices tem distância de $n-1$.

3. O centro de um grafo é um vértice u tal que $\max_{v \in V(G)} d(u,v)$ é mínimo, onde $d(u,v)$ é a distância entre u e v. Mostre que uma árvore tem exatamente 1 ou 2 centros.

4. Seja $G=(V,E)$ um grafo acíclico com k componentes conexas. Mostre que $|E|=|V|-k$.

5 Trajetos Eulerianos

1. Considere o grafo G da Figura 1. Qual o número mínimo de arestas (vértices não valem) que devemos adicionar a G de modo que o novo grafo seja simples e tenha um trajeto Euleriano Fechado ? Justifique.

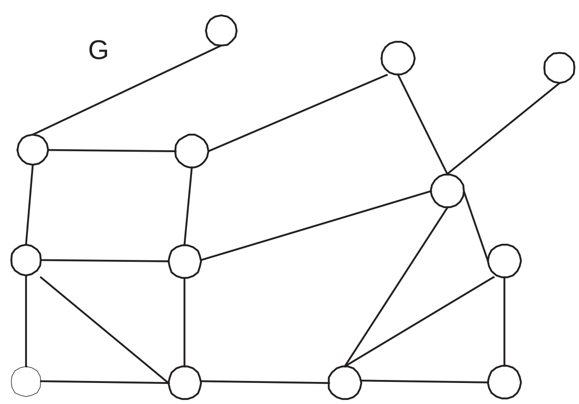

Figura 1:

2. Mostre que se um grafo direcionado tem um trajeto Euleriano, no máximo 2 vértices tem grau de entrada diferente do grau de saída.

3. Para quais valores de r e s, o grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é Euleriano.?

6 Grafos Completos e Grafos Bipartidos

1. Mostre que se G é simples e bipartido, então $|E(G)| \leq |V(G)|^2/4$.

2. Encontre o comprimento do menor ciclo em $K_{3,3}$

3. Determine o número de componentes conexas de $\overline{K}_{2,3}$ (complemento de $K_{2,3}$) e de $\overline{K}_n$

4. *Mostre que todo grafo simples G contem um subgrafo bipartido gerador H tal que $d_H(v) \geq d_G(v)/2$, onde $d_G(v)$ e $d_H(v)$ são, respectivamente, o grau de v em G e o grau de v em H.

5. Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo. Seja G um grafo bipartido com 11 vértices. O grafo G admite um ciclo Hamiltoniano? Por que?

7 Grafos Direcionados

1. Mostre que um grafo direcionado $G = (V, E)$ é fortemente conexo se e somente se existe um vértice v tal que v alcança todos os vértices de G e todos os vértices de G alcançam v.

2. Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. Mostre que G é fortemente conexo se e somente se para toda partição de V em dois conjuntos não vazios S e T, existe uma aresta de S para T.

3. Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. Dizemos que G é um torneio se para todo par de vértices u, v, com $u \neq v$, uma das condições vale: $(u, v) \in E$ ou $(v, u) \in E$. Responda as seguintes questões.

   a) *Mostre que todo torneio admite um caminho que passsa por todos os vértices do grafo apenas uma vez

   b) Exiba um torneio com 5 vértices que admite uma ordenação topológica.

8 Árvore Geradora de Custo Mínimo

1. Seja T uma árvore geradora para um grafo G. Definimos como gargalo de T, o custo da aresta mais cara de T. Uma árvore geradora T' para G é uma árvore de gargalo mínimo se e somente se nenhuma árvore geradora para G tem gargalo menor que T'. Responda as seguintes questões:

   (a) Toda árvore de gargalo mínimo é uma árvore geradora de custo mínimo? Prove ou dê um contra-exemplo

   (b) Toda árvore geradora de custo mínimo é uma árvore de gargalo mínimo? Prove ou dê um contra-exemplo

2. Seja $G = (V, E)$ um grafo completo e não direcionado com 5 vértices. Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Assuma que o custo da aresta que liga i a j é $i + j$ para todo $1 \leq i < j \leq 5$. Qual o custo da árvore geradora de custo mínimo para G?

3. Seja G um grafo conexo com pesos positivos e distintos nas arestas. Seja e a aresta mais cara de G. Sob quais condições a aresta e pode pertencer a árvore geradora de custo mínimo de G?

9 Caminhos de Custo Mínimo

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo completo e não direcionado com 5 vértices. Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Assuma que o custo da aresta que liga i a j é $i + j$ para todo $1 \leq i < j \leq 5$. Qual o custo do caminho mais curto entre os vértice 1 e 5?

2. Seja G um grafo direcionado com pesos positivos nas arestas e conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Sabemos que o caminho de peso mínimo entre os vértices 1 e 8 é $(1, 4, 2, 5, 7, 8)$. O que podemos afirmar sobre o caminho de peso mínimo entre os vértices 4 e 7?

10 Coloração de Vértices e de Arestas

1. Seja T uma árvore cujo grau máximo é 7. Determine o número cromático e o índice cromático de T.

2. Seja um grafo simples G. Seja c_1 a cor que aparece mais vezes em uma coloração de arestas para G e seja n_1 o número de arestas de cor c_1. Mostre que n_1 não excede $|V(G)|/2$.

3. Mostre que o número cromático de um grafo G é maior ou igual ao número de vértices de qualquer subgrafo completo de G.