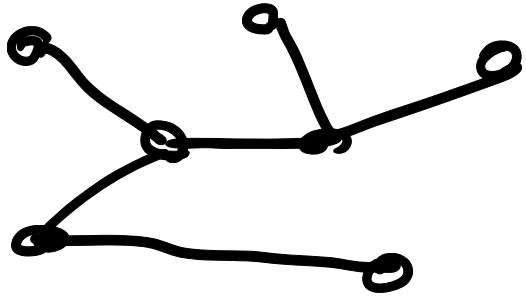
Caminho mais Curto

Caminho mais curto

Caminho mais curto

Como *Google Maps* encontra o melhor caminho até o meu destino?

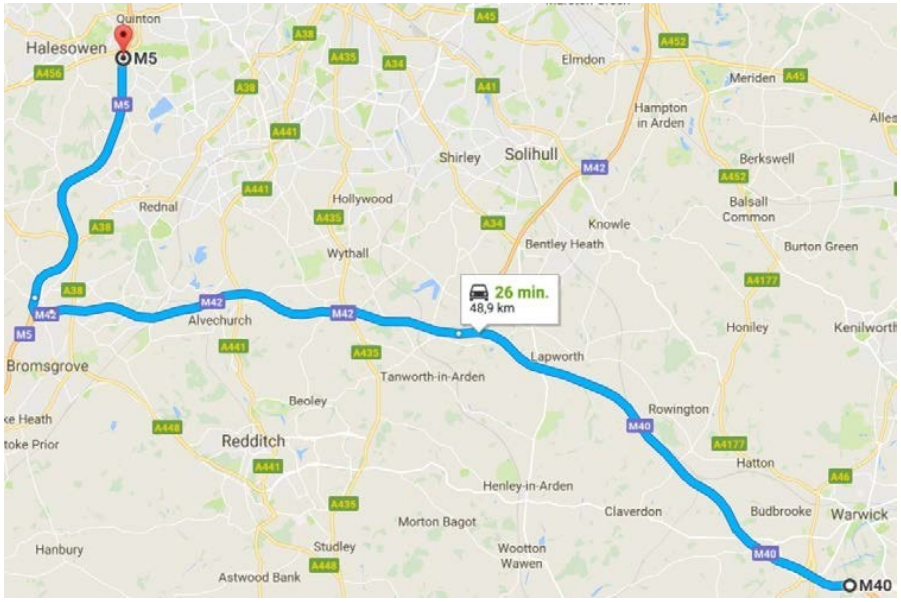


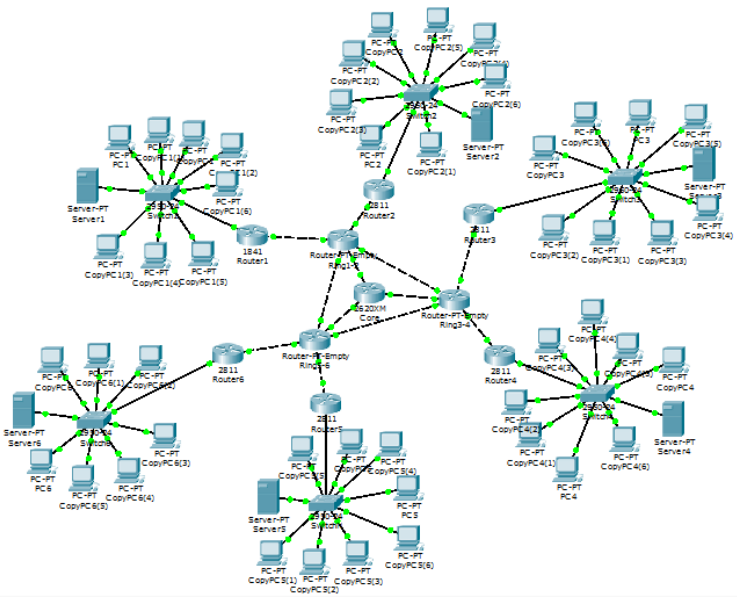
Caminho mais curto

Como *Google Maps* encontra o melhor caminho até o meu destino?

Como pacotes são roteados na internet até o destino?

...





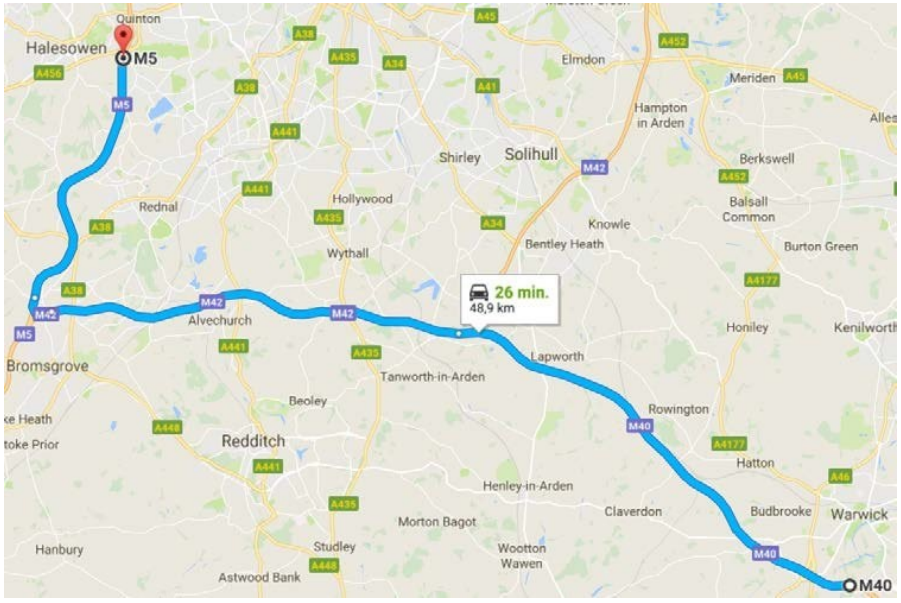
Caminho mais curto

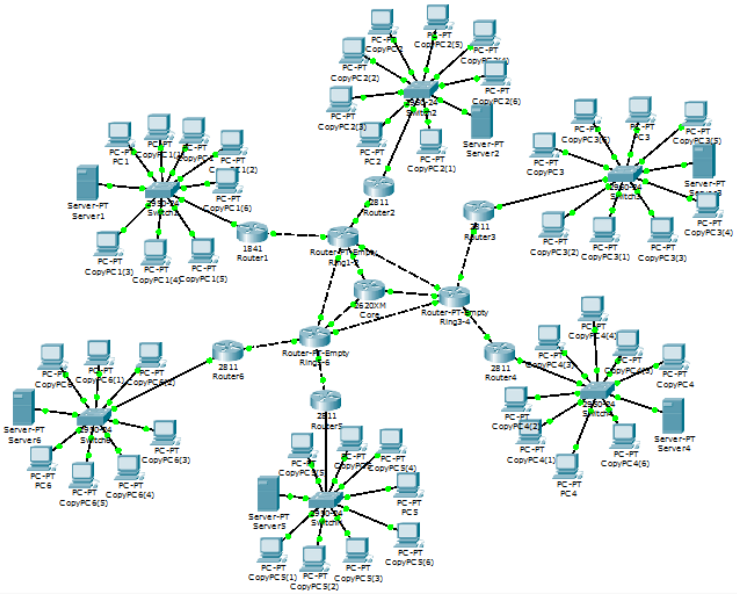
Como *Google Maps* encontra o melhor caminho até o meu destino?

Como pacotes são roteados na internet até o destino?

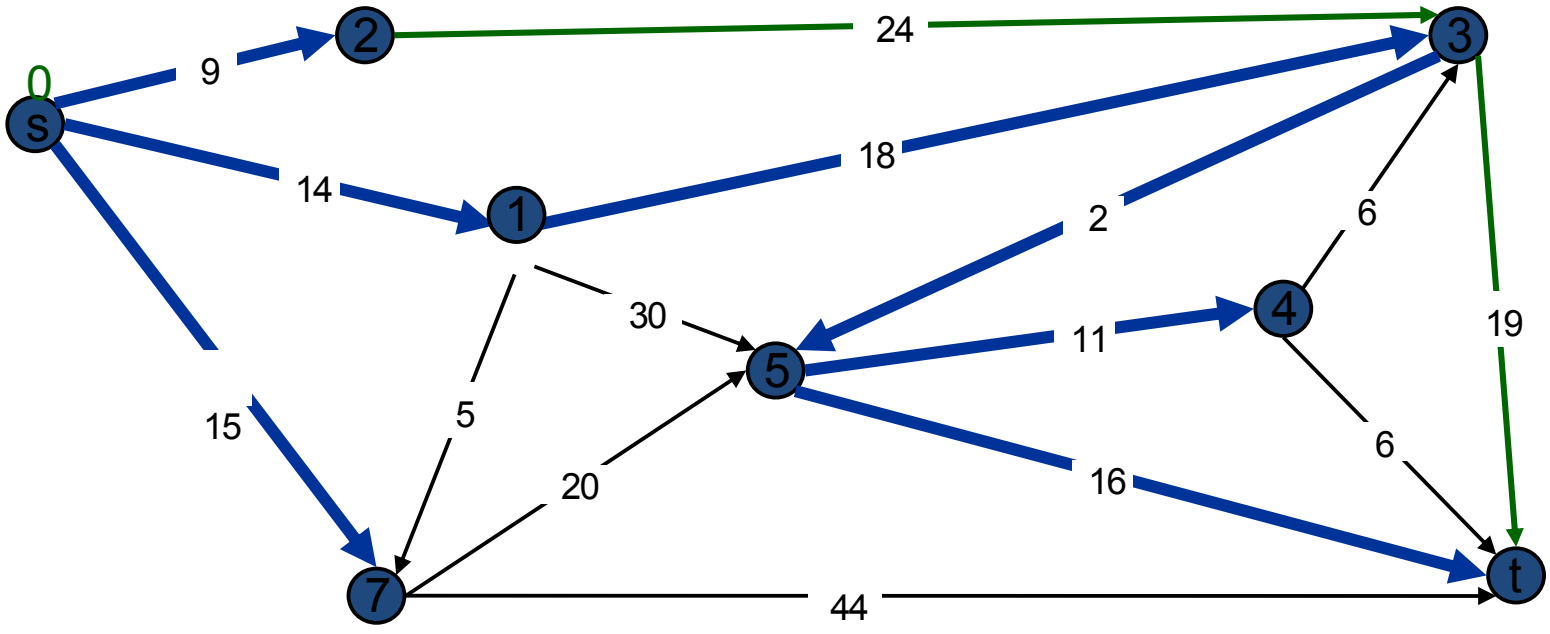
...

Problemas de caminho mais curto em grafos



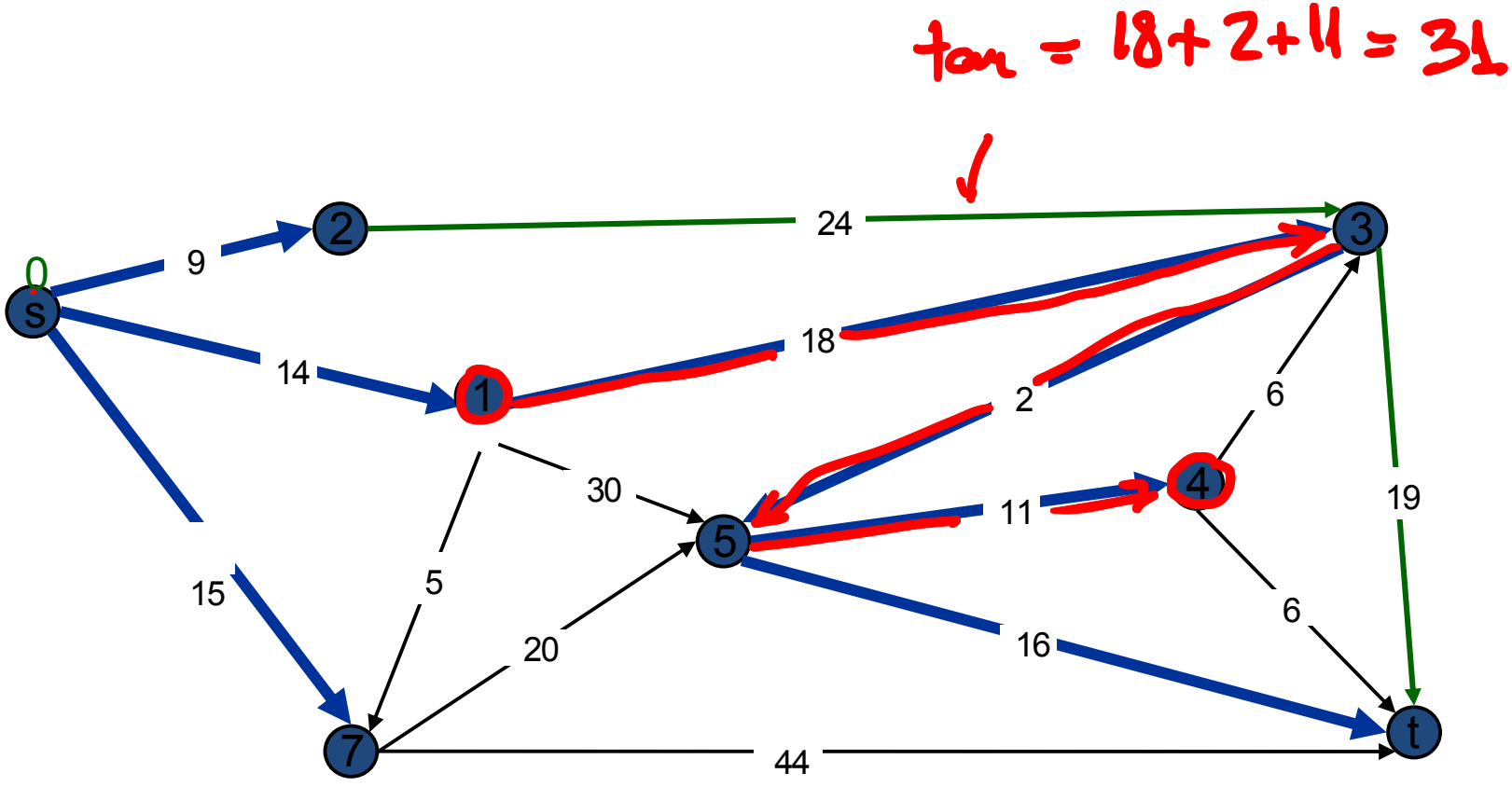


Vamos considerar grafos direcionados onde cada aresta e tem um tamanho $w(e)$ **positivo**



Vamos considerar grafos direcionados onde cada aresta e tem um tamanho $w(e)$ **positivo**

O tamanho de um caminho é a soma dos tamanhos de suas arestas

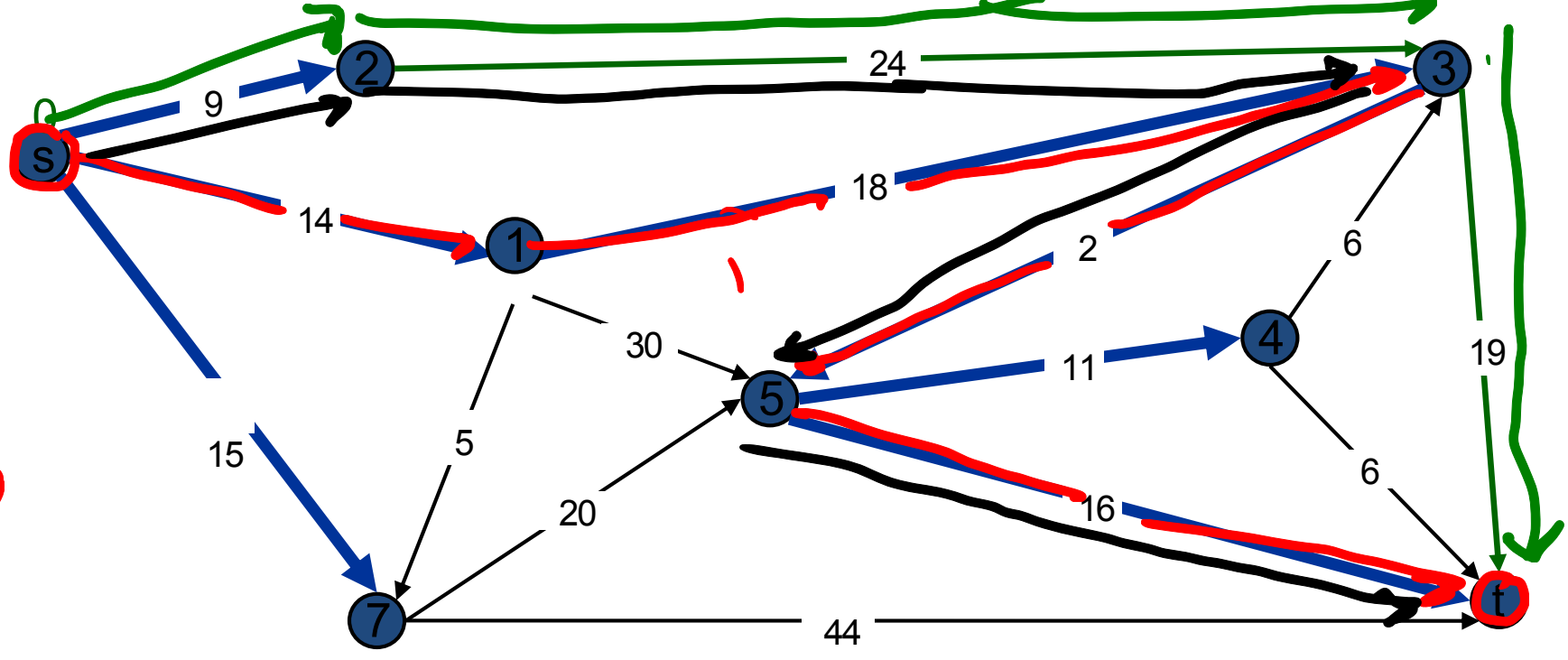


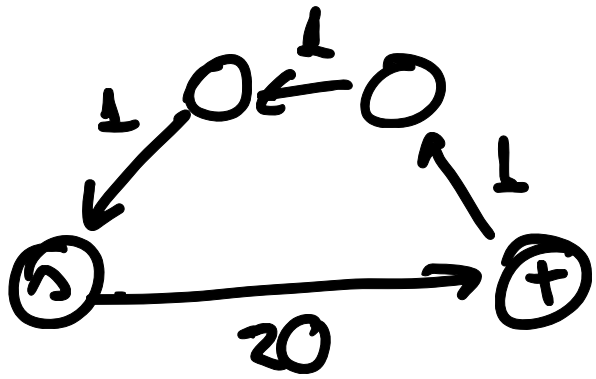
Problema de Caminho mais Curto: Dado um grafo direcionado com tamanhos positivos nas arestas, origem s e destino t, encontre um menor caminho de s a t.

CMC - SL

CMC de s a t tem tam = 14+18+2+16 = 50

CMC • verde = 9+24+19 = 52



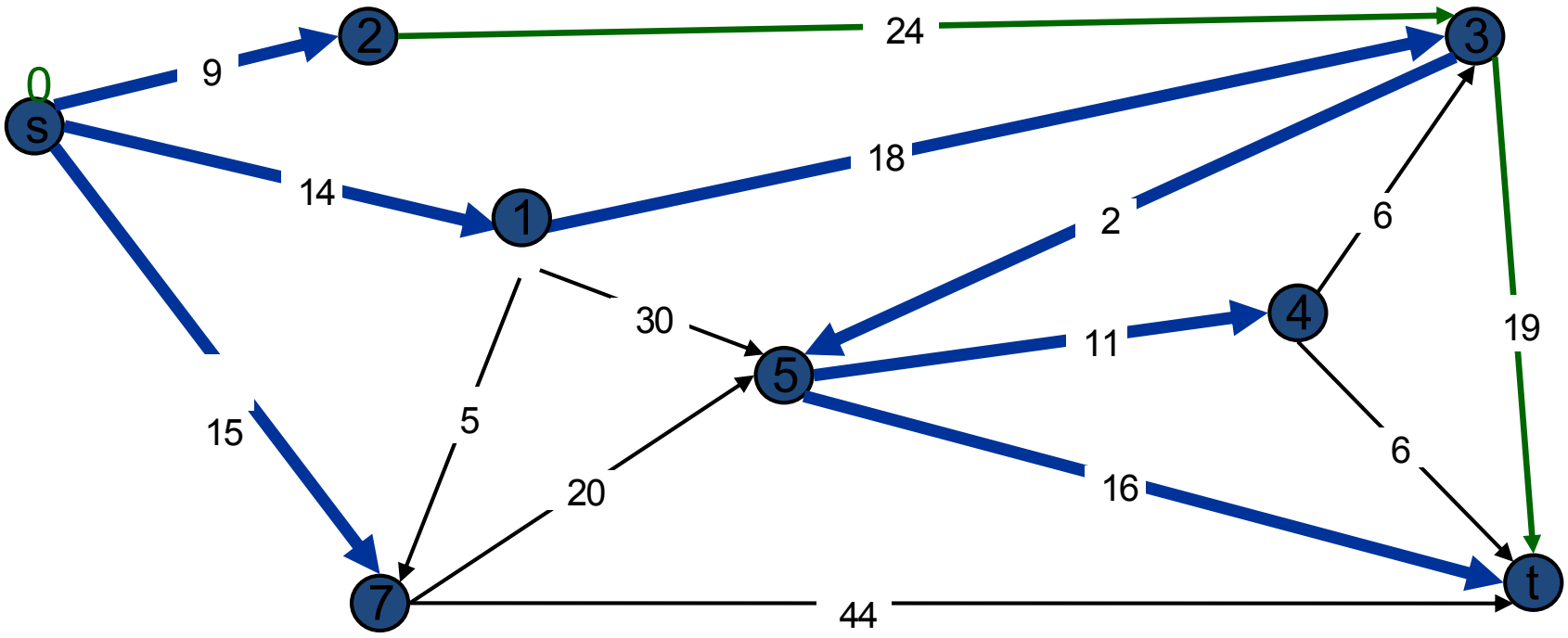


CMC de s à t = 20

"AGH" ou "trouver cette pièce"

Problema de Caminho mais Curto: Dado um grafo direcionado com tamanhos positivos nas arestas, origem s e destino t, encontre um menor caminho de s a t.

Pra encurtar: **CMC = caminho mais curto**



P: Algoritmo?

P: Algoritmo?

R: Força bruta: gerar todos os caminhos entre s e t, e selecionar o menor

P: Algoritmo?

R: Força bruta: gerar todos os caminhos entre s e t, e selecionar o menor

Problema: Muito ineficiente, o número de caminhos pode ser exponencial no número de vértices do grafo:

P: Algoritmo?

R: Força bruta: gerar todos os caminhos entre s e t, e selecionar o menor

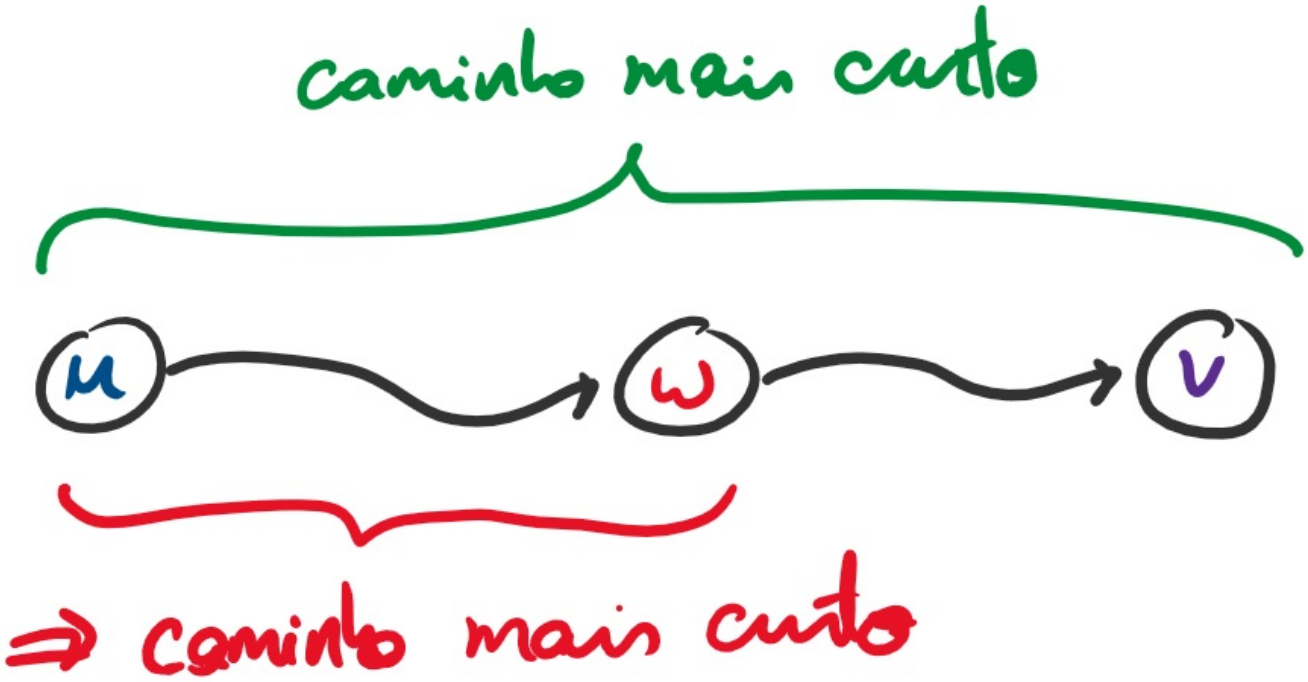
Problema: Muito ineficiente, o número de caminhos pode ser exponencial no número de vértices do grafo:

Vamos desenvolver um algoritmo muito mais eficiente: **Dijkstra**

Começamos com a seguinte observação

Lema

Se P é um CMC de u a v, e w um vértice nesse caminho, então o subcaminho de P $u \rightsquigarrow w$ é um CMC entre u e w

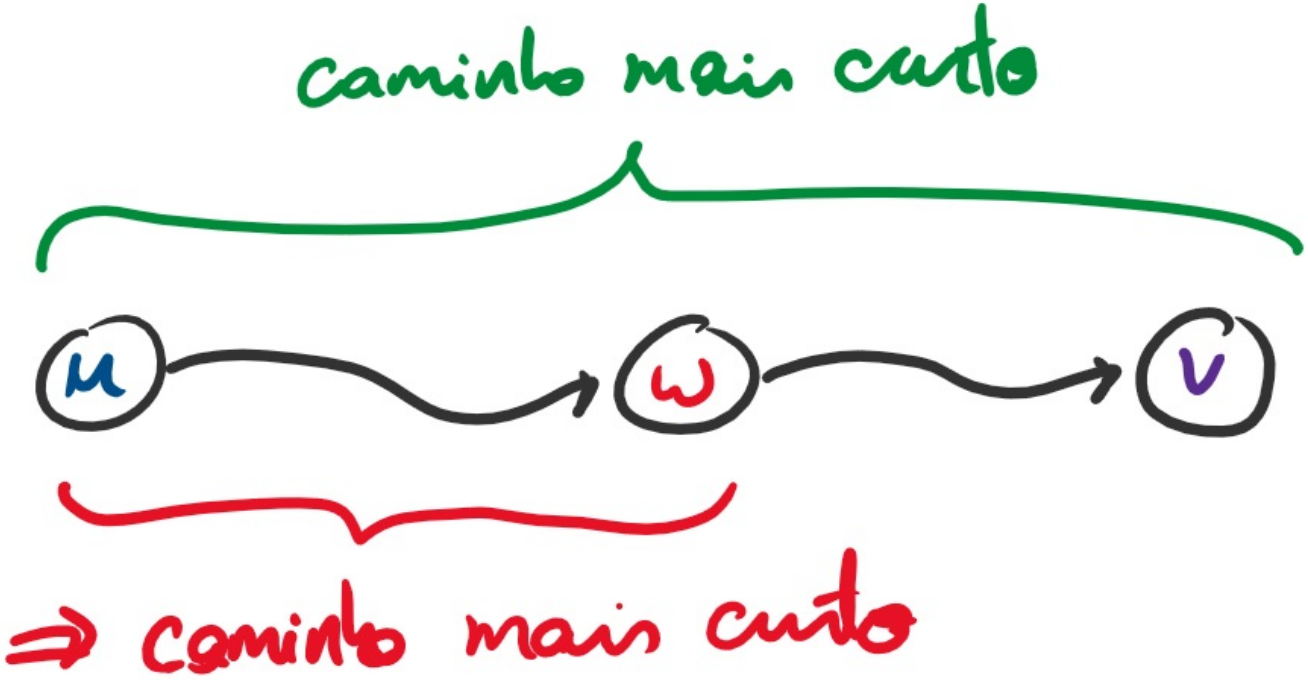


Começamos com a seguinte observação

Lema

Se P é um CMC de u a v, e w um vértice nesse caminho, então o subcaminho de P $u \rightsquigarrow w$ é um CMC entre u e w

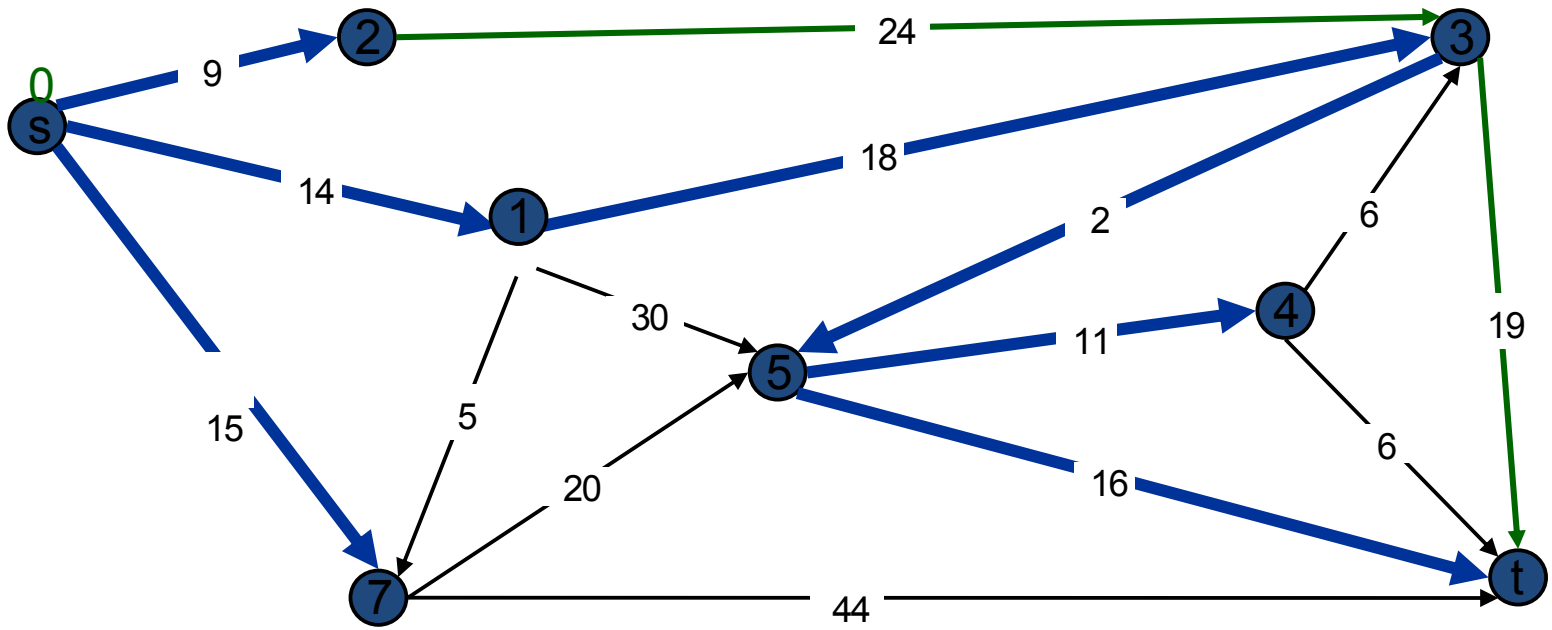
Prova. Se isso não fosse verdade, poderíamos obter um caminho mais curto que P substituindo o subcaminho de P $u \rightsquigarrow w$ por um menor



Notação: Vamos usar $P_{u,v}$ pra denotar um CMC de u a v

Def: A distância entre u e v é o tamanho do CMC entre eles

Ex: Distância de (s) a (7) é 15
Distância de (s) a (3) é 32

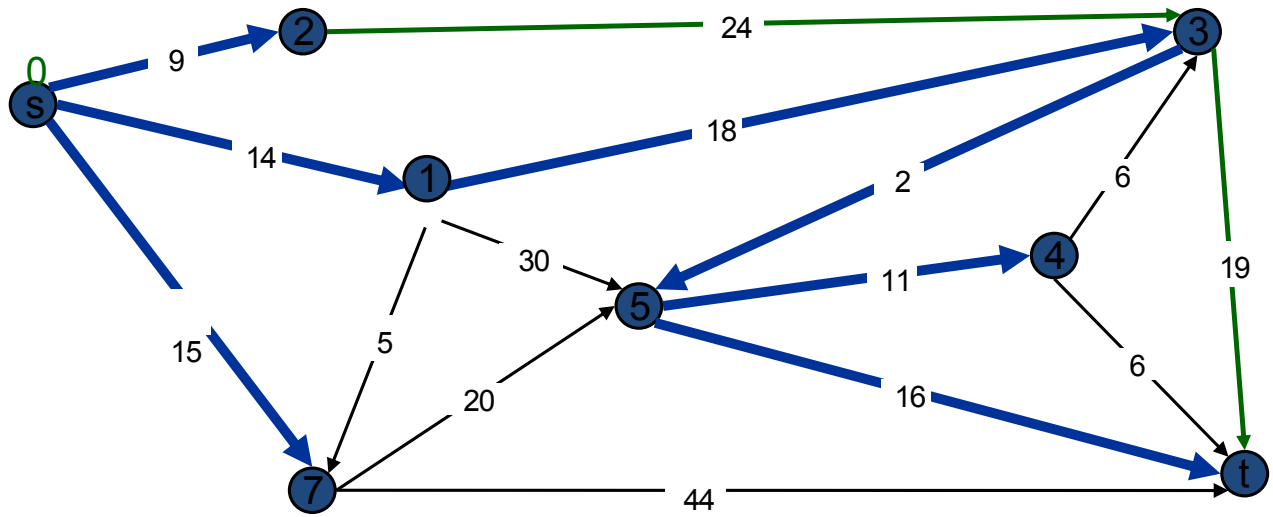


Ideia do Dijkstra:

Ideia do Dijkstra:

- Encontrar o CMC até o vértice mais próximo da origem s
- Encontrar o CMC até o segundo vértice mais próximo da origem s
- ... até encontrar o destino t

Def: v_k o k-ésimo vértice mais próximo de s
(ponta do k-ésimo menor caminho desde s)

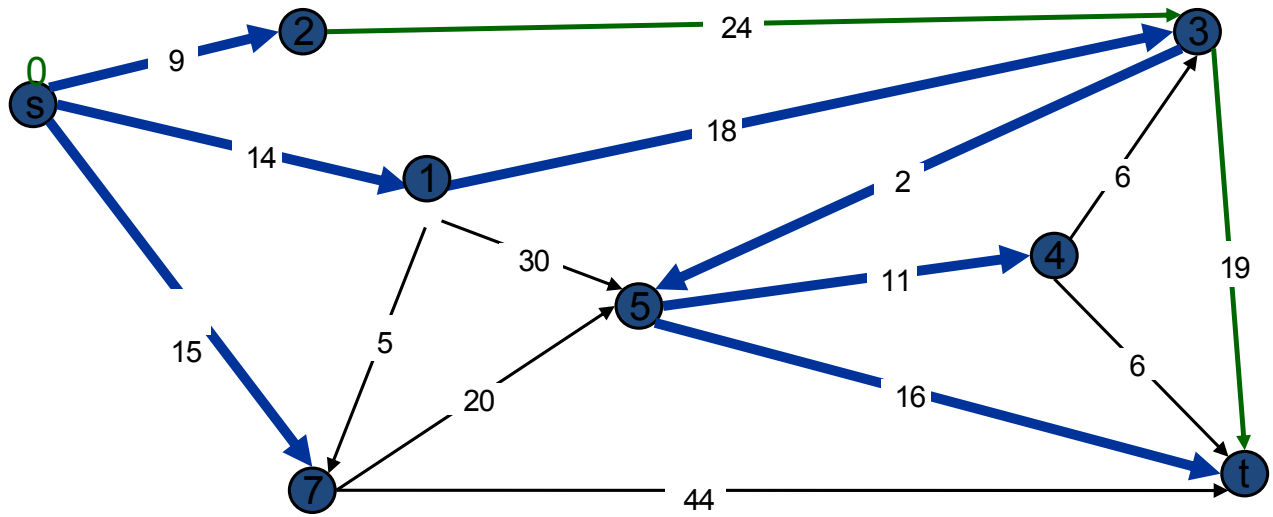


Ideia do Dijkstra:

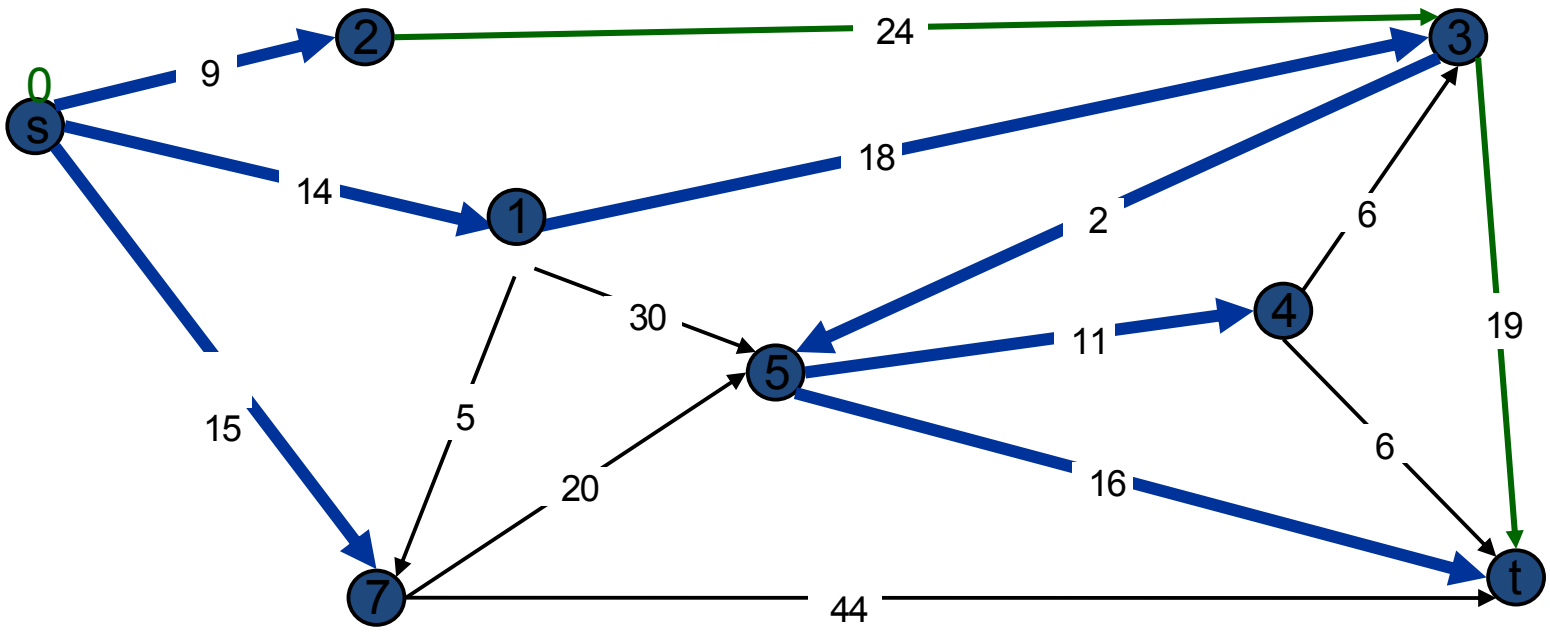
- Encontrar o CMC até o vértice mais próximo da origem s **(menor caminho desde s)**
- Encontrar o CMC até o segundo vértice mais próximo da origem s **(segundo menor caminho desde s)**
- ... até encontrar o destino t

Def: v_k o k-ésimo vértice mais próximo de s

(ponta do k-ésimo menor caminho desde s)

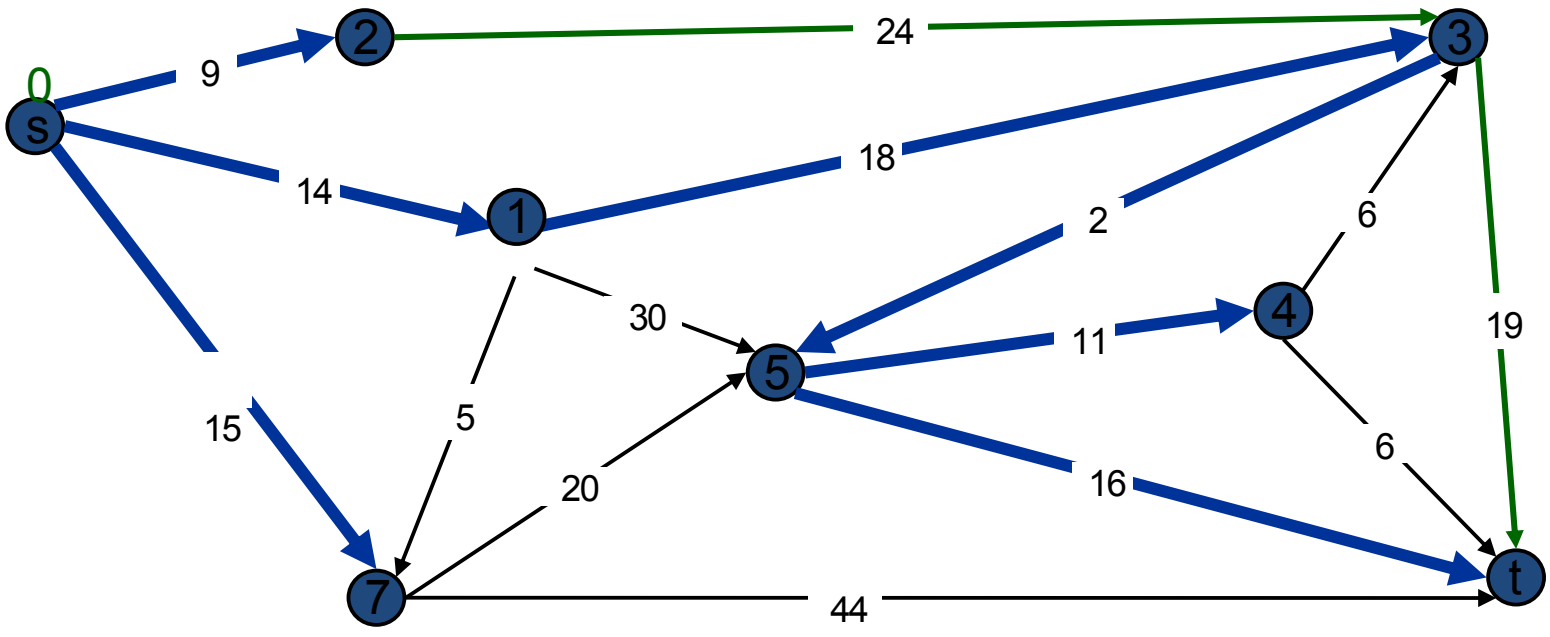


Seja v_k o k-ésimo vértice mais próximo de s



Seja v_k o k-ésimo vértice mais próximo de s

(ponta dos k-ésimo menor caminho a partir de s)



Vamos construir os CMCs **indutivamente**:

Vamos construir os CMCs **indutivamente**:

- Conhecemos os $k-1$ nós mais pertos $v_1, \ldots, v_{k-1}$ e CMC desde s ($k-1$ **menores caminhos desde** s)

Vamos construir os CMCs **indutivamente**:

- Conhecemos os $k-1$ nós mais pertos $v_1, \ldots, v_{k-1}$ e CMC desde s ($k-1$ **menores caminhos desde** s)
- Queremos encontrar v_k e seu CMC desde s (k**-ésimo menor caminho desde** s)

Vamos construir os CMCs **indutivamente**:

- Conhecemos os $k-1$ nós mais pertos $v_1, \ldots, v_{k-1}$ e CMC desde s ($k-1$ **menores caminhos desde** s)
- Queremos encontrar v_k e seu CMC desde s (k**-ésimo menor caminho desde** s)

P: Considere o CMC a v_k, seja u o penúltimo nó nesse caminho. Quem está mais perto de s, u ou v_k?

Vamos construir os CMCs **indutivamente**:

- Conhecemos os $k-1$ nós mais pertos $v_1, \ldots, v_{k-1}$ e CMC desde s ($k-1$ **menores caminhos desde** s)
- Queremos encontrar v_k e seu CMC desde s (k**-ésimo menor caminho desde** s)

P: Considere o CMC a v_k, seja u o penúltimo nó nesse caminho. Quem está mais perto de s, u ou v_k?

A: u está mais perto

Vamos construir os CMCs **indutivamente**:

- Conhecemos os $k-1$ nós mais pertos $v_1, \ldots, v_{k-1}$ e CMC desde s ($k-1$ **menores caminhos desde** s)
- Queremos encontrar v_k e seu CMC desde s (k**-ésimo menor caminho desde** s)

P: Considere o CMC a v_k, seja u o penúltimo nó nesse caminho. Quem está mais perto de s, u ou v_k?

A: u está mais perto $\Rightarrow$ u **é um dos** v_i**'s já conhecidos!**

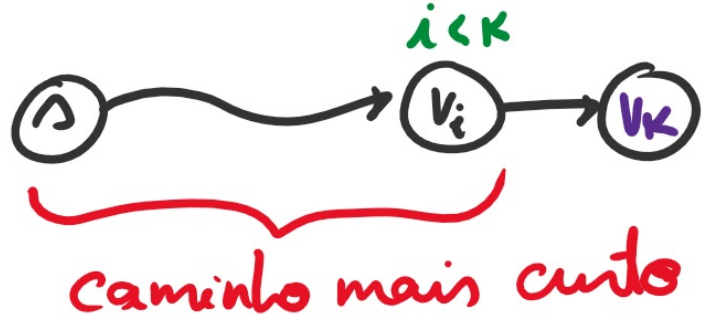
Vamos construir os CMCs **indutivamente**:

- Conhecemos os $k-1$ nós mais pertos $v_1, \ldots, v_{k-1}$ e CMC desde s ($k-1$ **menores caminhos desde** s)
- Queremos encontrar v_k e seu CMC desde s (k**-ésimo menor caminho desde** s)

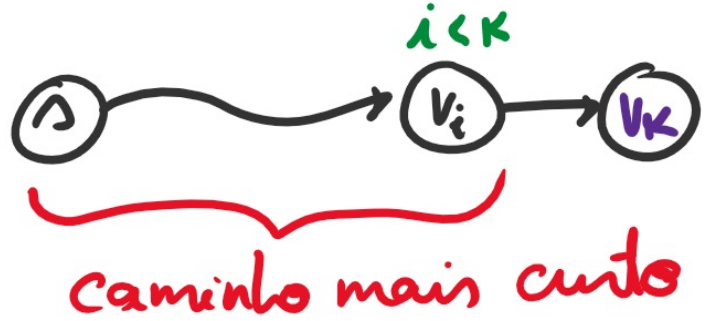
P: Considere o CMC a v_k, seja u o penúltimo nó nesse caminho. Quem está mais perto de s, u ou v_k?

A: u está mais perto $\Rightarrow$ u **é um dos** v_i**'s já conhecidos!**

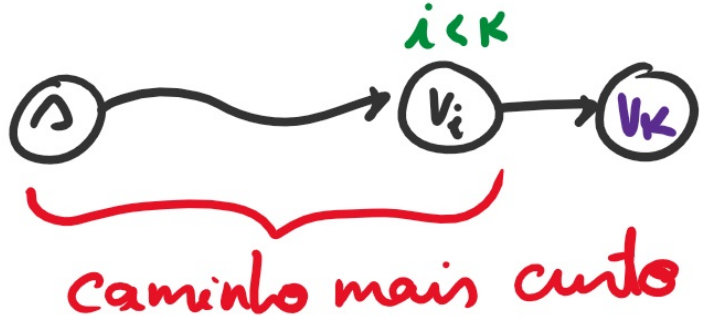
Os candidatos a k-ésimo caminho mais curto tem a forma



Os candidatos a k-ésimo caminho mais curto tem a forma

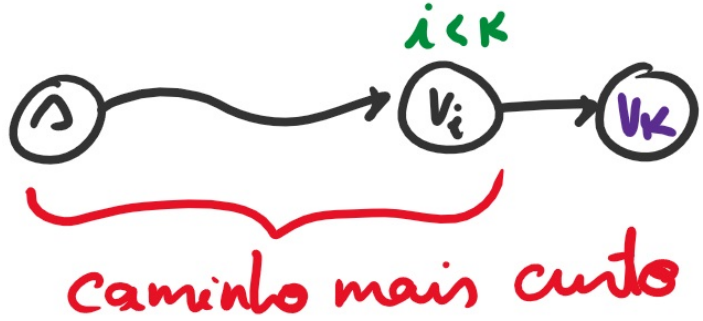


Os candidatos a k-ésimo caminho mais curto tem a forma



O k-ésimo caminho mais curto é o melhor (mais curto) candidato

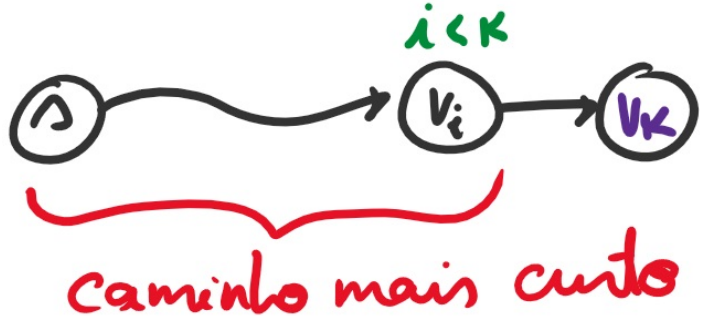
Os candidatos a k-ésimo caminho mais curto tem a forma



O k-ésimo caminho mais curto é o melhor (mais curto) candidato

O nó v_k é a ponta desse caminho

Os candidatos a k-ésimo caminho mais curto tem a forma



O k-ésimo caminho mais curto é o melhor (mais curto) candidato

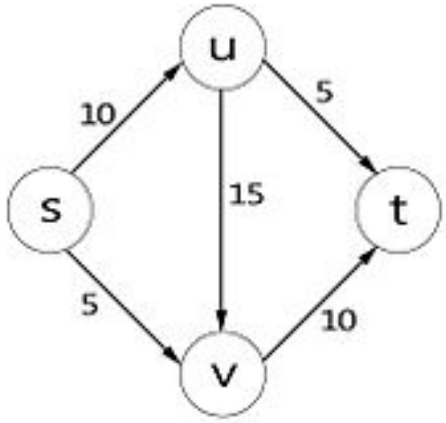
O nó v_k é a ponta desse caminho

Conseguimos computar o que queriamos!

```
Dijkstra(s, t)
    For k = 2 to n
        C = ∅      # candidatos a k-ésimo menor caminho desde s
        For todo i < k      # nós mais próximos, já conhecidos
            For todo vértice x não conhecido* adjacente a v_i
                Inclua o caminho (P_{s,v_i} → x) na lista C dos caminhos candidatos
            Fim For
        Fim For
        P ← o menor caminho da lista C
        v_k ← último vértice do caminho P
        P_{s,v_k} ← P
    Fim For
    Retorne caminho P_{s,t}
```

* Não conhecido quer dizer diferente dos nós $v_1, \ldots, v_{k-1}$

Ex:



Em *Análise de Algoritmos* veremos uma implementação bastante eficiente desse algoritmo

Exercícios

Exercício 1: Construa um grafo com aresta com comprimento **negativo** onde Dijkstra **não** retorna o caminho mais curto de s a t

Exercício 2: Considere um problema diferente: agora os "custos" estão **nos nós**, e **não nas arestas**

O custo de um caminho é a soma dos custos de seus nós.

Nessa situação, como você pode encontra o caminho mais barato de s a t usando um algoritmo de caminho mais curto?

Modelando como caminhos mais curtos

Podemos modelar diversos problemas como problema de caminho mais curto

Exercício 3: Você tem uma pequena empresa de consultoria, com clientes no Rio e São Paulo

Em cada mês você pode escolher basear seu escritório no Rio ou SP (Começa no Rio)

No fim do mês i você decide se mantém o escritório no lugar atual ou muda pra próxima cidade, e paga custo. Os custos estão na tabela abaixo

Você quer decidir aonde o escritório deve estar em cada momento de forma a minimizar o custo total. Modele usando caminho mais curto

movimento	**mes 1**	**mes 2**	**mes 3**	**mes 4**
SP-SP	-	3	20	30
SP-R	-	30	12	14
R-R	50	20	2	4
R-SP	11	33	30	40

Dica: Use um grafo com 4 "colunas" de nós, cada uma com 2 nós