Grafos Direcionados:
Noções Básicas

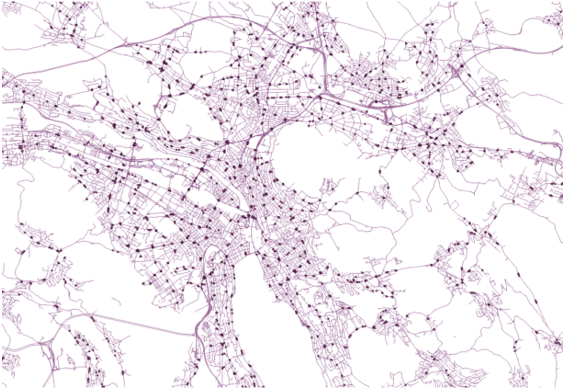
Grafos Direcionados

Em muitas aplicações, é importante ter direção nas arestas:

Grafos Direcionados

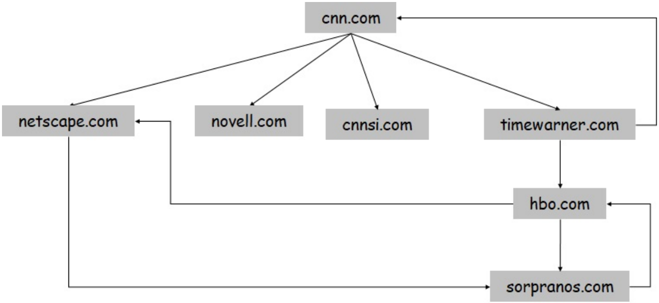
Em muitas aplicações, é importante ter direção nas arestas:

Redes de transporte



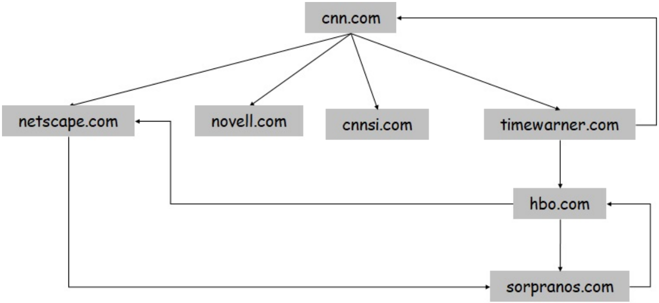
Grafos Direcionados

Grafo da internet



Grafos Direcionados

Grafo da internet



Disciplinas e seus pre-requisitos
Dependencia entre objetos/modulos

...

Grafos Direcionados

Grafos Direcionados

Isso motiva grafos direcionados

Grafos Direcionados

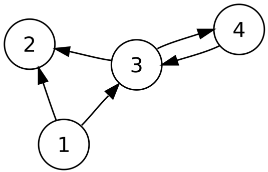
Isso motiva grafos direcionados

Definição

*Um **grafo direcionado** G é um par (V, E) onde*

1) V é um conjunto [nós]

*2) E é um conjunto de **pares ordendados** de nós [arcos ou arestas]*



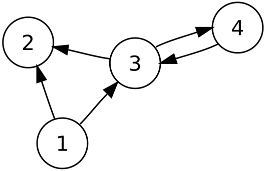
Grafos Direcionados

Definição (Grau de Entrada)

*O **grau de entrada** $d^-(v)$ de um vértice v é o número de arcos que chegam/apontam para v*

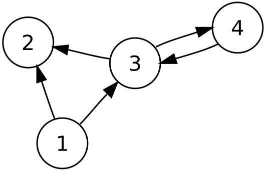
Definição (Grau de Saída)

*O **grau de saída** $d^+(v)$ de um vértice v é o número de arcos que saem de v*



Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?



Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?

Proposição

*Num grafo **direcionado** $G = (V, E)$,*

$$\textit{soma dos graus de saída} = \#\textit{arestas}$$

$$\equiv \qquad \sum_{v \in V} d^{+}(v) = |E|$$

Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?

Proposição

Num grafo ***direcionado*** $G = (V, E)$,

$$\textit{soma dos graus de saída} = \#\textit{arestas}$$

$$\equiv \qquad \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Note que não tem mais o “2” multiplicando o número de arestas

Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?

Proposição

Num grafo ***direcionado*** $G = (V, E)$,

$$\textit{soma dos graus de saída} = \#\textit{arestas}$$

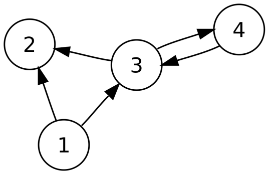
$$\equiv \qquad \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Note que não tem mais o “2” multiplicando o número de arestas

Prova: Por indução no número de arestas. Exercício importante

Grafos Direcionados

Pergunta: E qual a relação entre soma dos graus de saída e soma dos graus de entrada (ainda em grafos **direcionados**)?



Grafos Direcionados

Pergunta: E qual a relação entre soma dos graus de saída e soma dos graus de entrada (ainda em grafos **direcionados**)?

Proposição

*Num grafo **direcionado** $G = (V, E)$,*

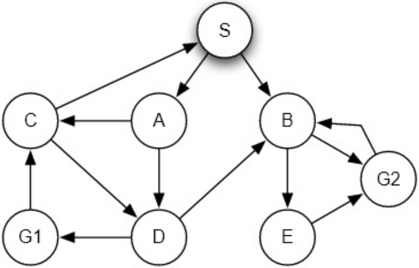
$$soma\ dos\ graus\ de\ saída = somadosgrausdesada$$

$$\equiv \qquad \sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v)$$

Prova: Por indução no número de arestas. Exercício importante

Passeios, caminhos, ciclos em Grafos Direcionados

As definições de **passeio, caminho, e ciclo** em grafos direcionados são análogas as que vimos para grafos direcionado



Existência de ciclos em grafos direcionados

Provamos que num grafo não-direcionado, se todos os nós tem grau pelo menos 2 $\Rightarrow$ tem ciclo

Existência de ciclos em grafos direcionados

Provamos que num grafo não-direcionado, se todos os nós tem grau pelo menos 2 $\Rightarrow$ tem ciclo

Temos o resultado análogo pra grafos direcionados

Lema

Considere um grafo direcionado. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo

Lema

Considere um grafo direcionado. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo

Lema

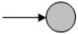
Considere um grafo direcionado. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo

Ideia: Pegue um nó e siga para seu "ante-vizinho", e seu "ante-vizinho", etc. até revisitar alguem $\Rightarrow$ ciclo!

Lema

Considere um grafo direcionado. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo

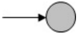
Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



Lema

Considere um grafo direcionado. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo

Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1

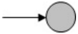


Seja $P = v_1 \dots v_k$ um maior caminho no grafo

Lema

Considere um grafo direcionado. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo

Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



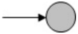
Seja $P = v_1 \dots v_k$ um maior caminho no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

Lema

Considere um grafo direcionado. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo

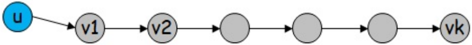
Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



Seja $P = v_1 \ldots v_k$ um maior caminho no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

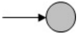
u pertence/não pertence? ao caminho P



Lema

Considere um grafo direcionado. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo

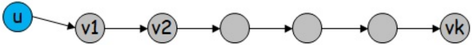
Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



Seja $P = v_1 \ldots v_k$ um maior caminho no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

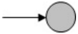
u pertence ao caminho P , senão teria caminho maior ainda



Lema

Considere um grafo direcionado. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo

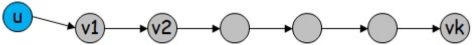
Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



Seja $P = v_1 \dots v_k$ um maior caminho no grafo

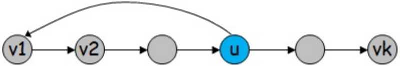
Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

u pertence ao caminho P , senão teria caminho maior ainda



Então temos um ciclo: $v_1 v_2 \dots u v_1$

P =



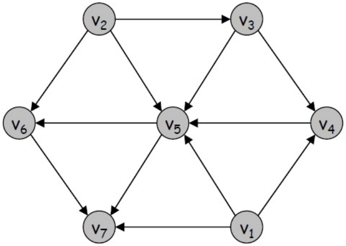
$\square$

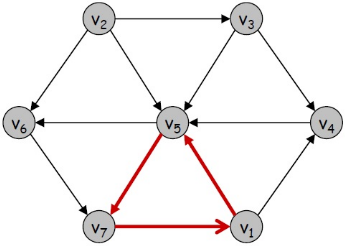
Grafos Direcionados Acíclicos

Grafos Direcionados Acíclicos

Definição

Um ***grafo direcionado acíclico (DAG)*** *é um grafo direcionado que não contém ciclos*





Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

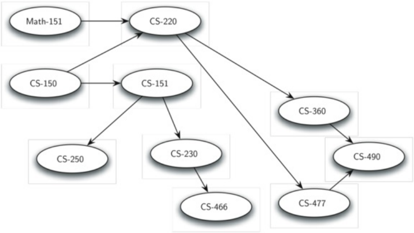
Muito usados para modelar relações de precedência: uma tarefa/disciplina/etc. tem que ser feita antes de outra

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

Muito usados para modelar relações de precedência: uma tarefa/disciplina/etc. tem que ser feita antes de outra

Exemplo: Grafo de disciplinas: nós são disciplinas, tem aresta (u, v) se uma matéria u é pré-requisito de matéria v

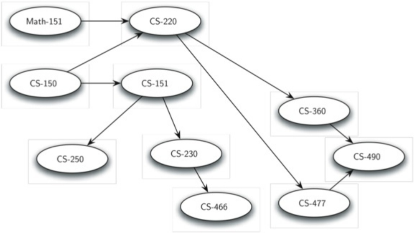


Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

Muito usados para modelar relações de precedência: uma tarefa/disciplina/etc. tem que ser feita antes de outra

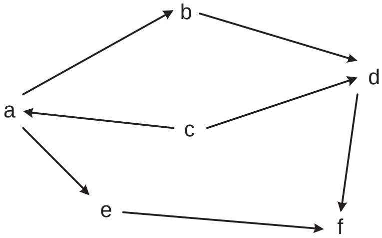
Exemplo: Grafo de disciplinas: nós são disciplinas, tem aresta (u, v) se uma matéria u é pré-requisito de matéria v



Não pode ter ciclo, senão não tem como acabar as matérias

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Dado tal grafo de disciplinas, em que ordem faze-las?



Grafos Direcionados Acíclicos

Tal ordem é chamada ordenação topológica do grafo

Intuitivamente queremos organizar os nós do grafo tal que arestas sempre vão da esquerda pra direita

Grafos Direcionados Acíclicos

Tal ordem é chamada ordenação topológica do grafo

Intuitivamente queremos organizar os nós do grafo tal que arestas sempre vão da esquerda pra direita

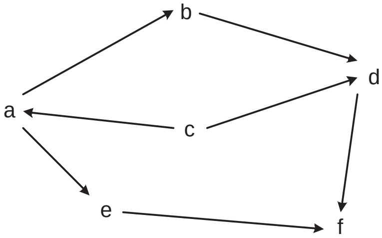
Definição

*Uma **ordenação topológica** de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é uma atribuição de um número natural $f(v) \in \mathbb{N}$ a cada vértice v ("sua posição na ordem") tal que:*

(i) Cada nó recebe valor diferente: $f(u) \neq f(v)$ para $u \neq v$

(ii) Para toda aresta $(u, v) \in E$ temos $f(u) < f(v)$ (arestas da esquerda pra direita)

Exemplo:



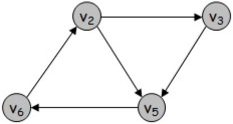
Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Todo grafo direcionado tem um ordem topológica?

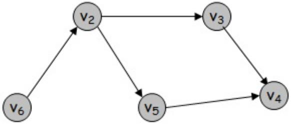
Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Todo grafo direcionado tem um ordem topológica?

Resp: Não



Não tem ordem topologica



Tem duas ordens topologicas

Grafos Direcionados Acíclicos

Perguntas: Quando um grafo possui ordem topológica?
Algoritmo para encontrar ordem topológica, caso exista?

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \qquad\qquad \text{ordem topológica}$$

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir de v_i na ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir antes de v_i na ordem topológica

Vamos provar:

$$G \text{ tem ciclo} \Rightarrow G \text{ não tem ordem topológica}$$

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir antes de v_i na ordem topológica

$\Rightarrow$ contradição que v_i é o primeiro do ciclo na ordem □

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: E o contrário

G não tem ciclo (DAG) $\Rightarrow$ tem ordem topológica??

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: E o contrário

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \;\Rightarrow\; \text{tem ordem topológica??}$$

Resp: Sim!

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: E o contrário

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{tem ordem topológica??}$$

Resp: Sim!

Para provar precisamos de um lema...

Grafos Direcionados Acíclicos

Lema

Todo DAG tem/não tem? um vértice com grau de entrada 0

Grafos Direcionados Acíclicos

Lema

Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

Provamos anteiormente que se todos os nós tivessem grau de entrada ≥ 1 teria ciclo

Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica:

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{ tem ordem topológica}$$

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica:

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{ tem ordem topológica}$$

Prova: Por indução no número de vértices de G

Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica:

$$G \text{ não tem ciclo (DAG)} \Rightarrow \text{ tem ordem topológica}$$

Prova: Por indução no número de vértices de G

Caso base: G tem apenas um vértice $v \Rightarrow$ ordenação topológica trivial $f(v) = 1$

Passo Indutivo: Considere DAG G com $n+1$ nós

Pela proposição anterior, G tem um nó v com grau de entrada 0

Remova v do grafo, obtendo $G' = G - v$. Como G' é DAG e tem n nós, pela **hipótese indutiva** tem ordenação topológica f'

Crie uma ordenação topológica para o grafo original G colocando o nó v na frente, e continuando com a ordenação de G'

(Mais precisamente, defina a ord. top. f para G fazendo $f(v) = 1$ e $f(u) = f'(u) + 1$ para todo $u \neq v$)

Verifique que pra toda aresta (x, y) em G, $f(x) < f(y)$ $\square$

Ou seja, provamos o seguinte:

Teorema

Um grafo direcionado tem uma ordenação topológica se e somente se ele é acíclico:

$$G \textit{ tem ordem topológica} \Leftrightarrow \textit{não tem ciclo}$$

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)
    If G tem apenas um vértice v
        $f(v) = 1$
    Else
        Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

    End if
    Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

$f(v) = 1$

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

$f' \leftarrow \text{OrdemTopologica}(G - v)$

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)
If G tem apenas um vértice v
$f(v) = 1$
Else
Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G
$f' \leftarrow \text{OrdemTopologica}(G - v)$
\# coloca v na frente dessa ordem

End if
Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, algoritmo recursivo para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)
  If G tem apenas um vértice v
    $f(v) = 1$
  Else
    Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G
    $f' \leftarrow \text{OrdemTopologica}(G - v)$

    # coloca v na frente dessa ordem
    For todo vértice u de $G - v$
      $f(u) \leftarrow f'(u) + 1$
    End for
    $f(v) \leftarrow 1$
  End if
  Retorna f

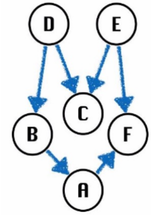
Exercícios

Exercício 1: Prove por indução que para todo grafo direcionado, a soma dos graus de saída é igual ao número de arestas:

$$\sum_{v} d^{+}(v) = \# \text{ de arestas}$$

Exercícios

Exercício 2: Quantas ordenações topológicas tem o grafo abaixo:



Exercício 3: Um aluno(a) tem disciplinas a serem feitas para obter seu diploma em Ciência/Engenharia de Computação. Essas disciplinas tem pré-requisitos entre elas, modelado como um DAG G

Dê um algoritmo recursivo **NumSemestres(G)** para encontrar o número **mínimo** de semestres necessários para o(a) aluno(a) obter o diploma.

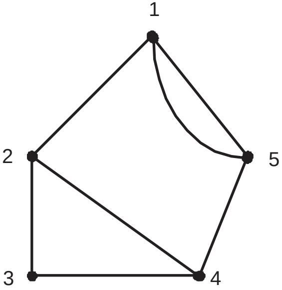
Representações Computacionais

Representações Computacionais

Para poder utilizar os grafos na modelagem e resolução de problemas computacionais, é necessário utilizar estruturas de dados que permitam armazená-los eficientemente em meios digitais.

Matriz de Adjacência – Grafos Não Direcionados

Seja $G = (V, E)$ um grafo, onde $V = \{1, \ldots, n\}$. A entrada (i, j) de uma matriz de adjacência indica o número de arestas que tem como extremidades i e j.



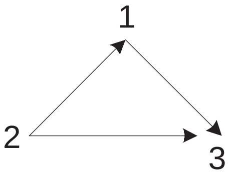
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	2
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	2	0	0	1	0

Matriz de Adjacência – Grafos Não Direcionados

A matriz é simétrica, como podemos observar na Figura. Esta simetria permite guardar somente os elementos da diagonal principal e os elementos abaixo (ou acima) dela. Dessa forma economiza-se espaço no armazenamento da estrutura.

Matriz de Adjacência – Grafos Direcionados

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado, onde $V = \{1, \ldots, n\}$. A entrada (i, j) de uma matriz de adjacência indica o número de arestas que tem i como cauda e j como cabeça. Neste caso, a matriz não é necessariamente simétrica:



	1	2	3
1	0	0	1
2	1	0	1
3	0	0	0

Matriz de Adjacência – Grafos Direcionados

Dentre as propriedades das matrizes de adjacências, destacamos:

- Necessita cerca de n^2 posições de memória.
- A existência de uma aresta pode ser testada com uma única operação.
- Para listar todos os vértices e arestas do grafo precisamos de cerca de n^2 operações.

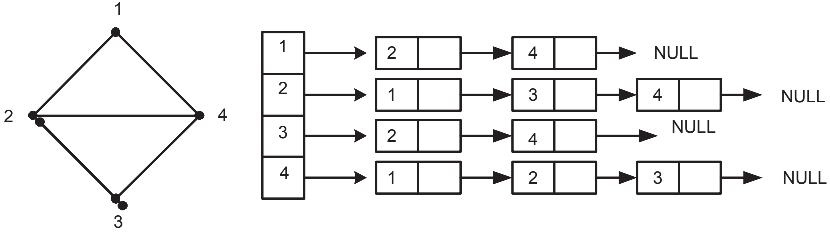
Lista de Adjacência

Em muitos casos, lidamos com grafos esparsos, ou seja, com “poucas” arestas. Nesse caso é um desperdício utilizar n^2 posições de memória. A proxima figura mostra um grafo com 5 vértices e 4 arestas, e sua matriz de adjacências. Observe que a maioria das entradas são nulas.

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

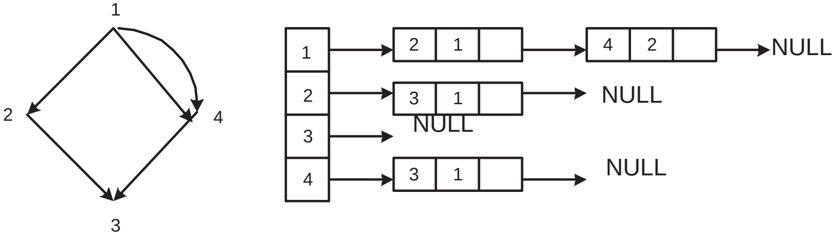
Lista de Adjacência

Uma alternativa para evitar este desperdício, é utilizar um vetor de listas encadeadas, onde a lista correspondente a *i-ésima* posição guarda os elementos adjacentes ao vértice *i*.



Lista de Adjacência

Para representar arestas paralelas em listas de adjacências, podemos utilizar um campo extra para guardar a multiplicidade da aresta.



Lista de Adjacência

Dentre as características das listas de adjacências destacamos:

- cerca de $n + |E|$ posições de memória são necessárias.
- Para descobrir se uma aresta pertence ao grafo, pode ser necessário percorrer uma lista encadeada inteira.
- O grafo pode ser percorrido em um tempo proporcional ao número de arestas.