

Grafos Direcionados: Noções Básicas

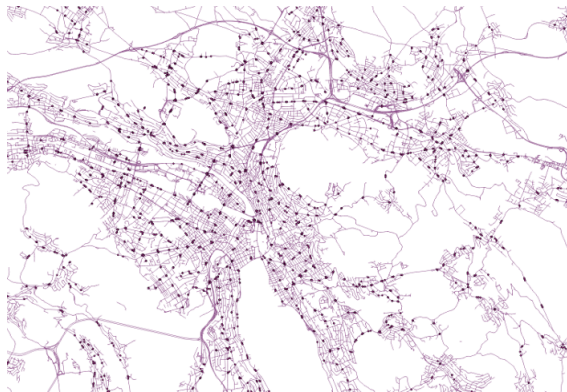
Grafos Direcionados

Em muitas aplicações, é importante ter **direção** nas arestas:

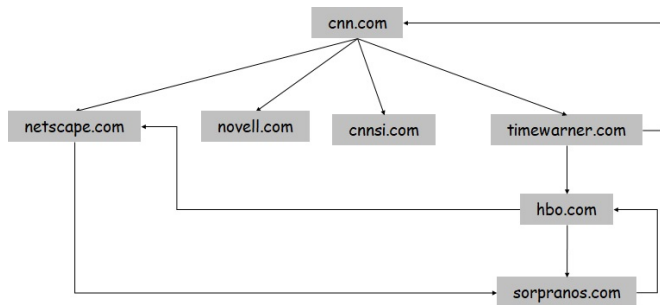
Grafos Direcionados

Em muitas aplicações, é importante ter **direção** nas arestas:

Redes de transporte



Grafo da internet



Disciplinas e seus pre-requisitos

Dependencia entre objetos/modulos

...

Grafos Direcionados

Grafos Direcionados

Isso motiva grafos direcionados

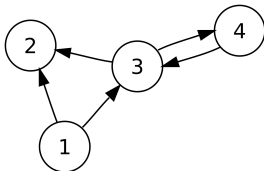
Grafos Direcionados

Isso motiva grafos direcionados

Definição

Um **grafo direcionado** G é um par (V, E) onde

- 1) V é um conjunto [nós]
- 2) E é um conjunto de **pares ordenados** de nós [arcos ou arestas]



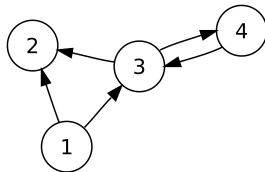
Grafos Direcionados

Definição (Grau de Entrada)

O **grau de entrada** $d^-(v)$ de um vértice v é o *número de arcos que chegam/apontam para v*

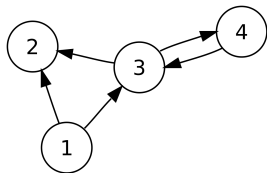
Definição (Grau de Saída)

O **grau de saída** $d^+(v)$ de um vértice v é o *número de arcos que saem de v*



Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a **soma dos graus de saída** e o **número de arestas**?



Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a **soma dos graus de saída** e o **número de arestas**?

Proposição

Num grafo **direcionado** $G = (V, E)$,

soma dos graus de saída = #arestas

$$\equiv \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a **soma dos graus de saída** e o **número de arestas**?

Proposição

Num grafo **direcionado** $G = (V, E)$,

soma dos graus de saída = #arestas

$$\equiv \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Note que não tem mais o “2” multiplicando o número de arestas

Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a **soma dos graus de saída** e o **número de arestas**?

Proposição

Num grafo **direcionado** $G = (V, E)$,

soma dos graus de saída = #arestas

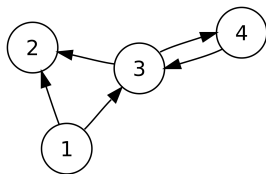
$$\equiv \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Note que não tem mais o “2” multiplicando o número de arestas

Prova: Por indução no número de arestas. **Exercício importante**

Grafos Direcionados

Pergunta: E qual a relação entre **soma dos graus de saída** e **soma dos graus de entrada** (ainda em grafos **direcionados**)?



Grafos Direcionados

Pergunta: E qual a relação entre **soma dos graus de saída** e **soma dos graus de entrada** (ainda em grafos **direcionados**)?

Proposição

Num grafo **direcionado** $G = (V, E)$,

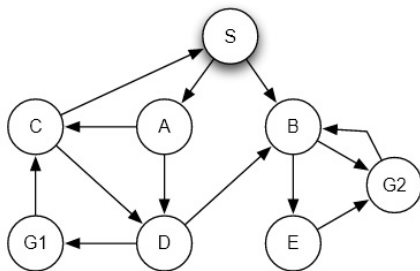
soma dos graus de saída = somados graus de entrada

$$\equiv \sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v)$$

Prova: Por indução no número de arestas. **Exercício importante**

Passeios, caminhos, ciclos em Grafos Direcionados

As definições de **passeio**, **caminho**, e **ciclo** em grafos direcionados são análogas as que vimos para grafos direcionado



Existência de ciclos em grafos direcionados

Provamos que num grafo **não-direcionado**, se todos os nós tem grau pelo menos 2 \Rightarrow tem ciclo

Existência de ciclos em grafos direcionados

Provamos que num grafo **não-direcionado**, se todos os nós tem grau pelo menos 2 \Rightarrow tem ciclo

Temos o resultado análogo pra grafos **direcionados**

Lema

*Considere um grafo **direcionado**. Se todos os nós tem **grau de entrada** pelo menos 1, então o grafo tem ciclo*

Lema

*Considere um grafo **direcionado**. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo*

Lema

*Considere um grafo **direcionado**. Se todos os nós tem grau de entrada pelo menos 1, então o grafo tem ciclo*

Ideia: Pegue um nó e siga para seu “ante-vizinho”, e seu “ante-vizinho”, etc. até visitar alguém \Rightarrow ciclo!

Lema

Considere um grafo *direcionado*. Se todos os nós tem *grau de entrada pelo menos 1*, então o grafo tem ciclo

Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem *grau de entrada ≥ 1*



Lema

Considere um grafo *direcionado*. Se todos os nós tem *grau de entrada pelo menos 1*, então o grafo tem ciclo

Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem *grau de entrada ≥ 1*



Seja $P = v_1 \dots v_k$ um *maior caminho* no grafo

Lema

Considere um grafo *direcionado*. Se todos os nós tem *grau de entrada pelo menos 1*, então o grafo tem ciclo

Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem *grau de entrada ≥ 1*



Seja $P = v_1 \dots v_k$ um *maior caminho* no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

Lema

Considere um grafo *direcionado*. Se todos os nós tem *grau de entrada pelo menos 1*, então o grafo tem ciclo

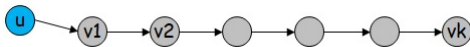
Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem grau de entrada ≥ 1



Seja $P = v_1 \dots v_k$ um *maior caminho* no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

u *pertence/não pertence?* ao caminho P



Lema

Considere um grafo *direcionado*. Se todos os nós tem *grau de entrada pelo menos 1*, então o grafo tem ciclo

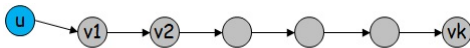
Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem *grau de entrada ≥ 1*



Seja $P = v_1 \dots v_k$ um *maior caminho* no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

u *pertence* ao caminho P , senão teria caminho maior ainda



Lema

Considere um grafo *direcionado*. Se todos os nós tem *grau de entrada pelo menos 1*, então o grafo tem ciclo

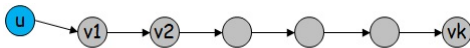
Prova: Considere grafo direcionado G onde todos os nós tem *grau de entrada ≥ 1*



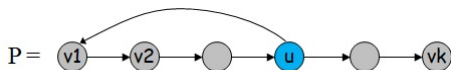
Seja $P = v_1 \dots v_k$ um *maior caminho* no grafo

Pela hipótese tem algum nó u apontando pro início do caminho v_1

u *pertence* ao caminho P , senão teria caminho maior ainda



Então temos um *ciclo*: $v_1 v_2 \dots u v_1$

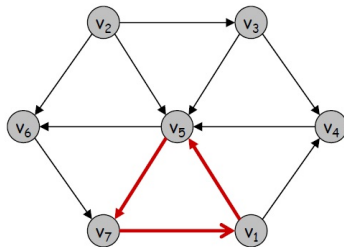
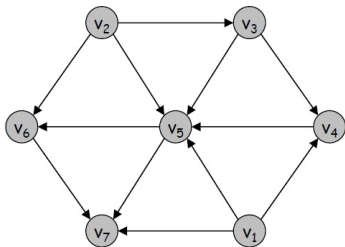


Grafos Direccionados Acíclicos

Grafos Direcionados Acíclicos

Definição

Um **grafo direcionado acíclico (DAG)** é um grafo direcionado que *não contém ciclos*



Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

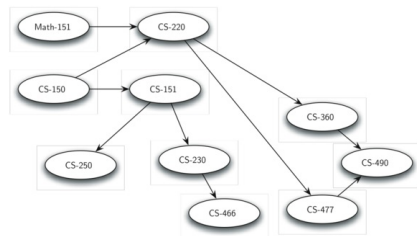
Muito usados para modelar **relações de precedência**: uma tarefa/disciplina/etc. tem que ser feita antes de outra

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

Muito usados para modelar **relações de precedência**: uma tarefa/disciplina/etc. tem que ser feita antes de outra

Exemplo: **Grafo de disciplinas**: nós são disciplinas, tem aresta (u, v) se uma matéria u é pré-requisito de matéria v

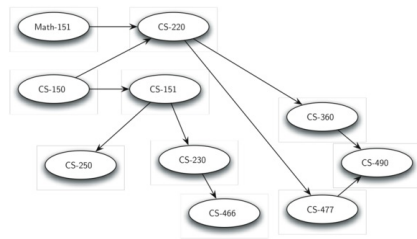


Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Onde DAG's aparecem?

Muito usados para modelar **relações de precedência**: uma tarefa/disciplina/etc. tem que ser feita antes de outra

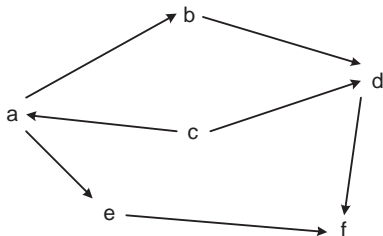
Exemplo: **Grafo de disciplinas**: nós são disciplinas, tem aresta (u, v) se uma matéria u é pré-requisito de matéria v



Não pode ter ciclo, senão não tem como acabar as matérias

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Dado tal grafo de disciplinas, em que ordem faze-las?



Grafos Direcionados Acíclicos

Tal ordem é chamada **ordenação topológica** do grafo

Intuitivamente queremos organizar os nós do grafo tal que arestas sempre vão **da esquerda pra direita**

Grafos Direcionados Acíclicos

Tal ordem é chamada **ordenação topológica** do grafo

Intuitivamente queremos organizar os nós do grafo tal que arestas sempre vão **da esquerda pra direita**

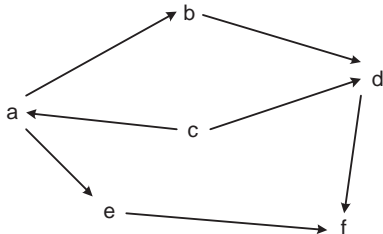
Definição

Uma **ordenação topológica** de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é uma atribuição de um número natural $f(v) \in \mathbb{N}$ a cada vértice v (“sua posição na ordem”) tal que:

- (i) Cada nó recebe valor diferente: $f(u) \neq f(v)$ para $u \neq v$
- (ii) Para toda aresta $(u, v) \in E$ temos $f(u) < f(v)$ (**arestas da esquerda pra direita**)

Grafos Direcionados Acíclicos

Exemplo:



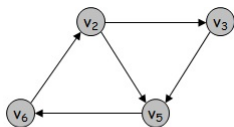
Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Todo grafo direcionado tem um ordem topológica?

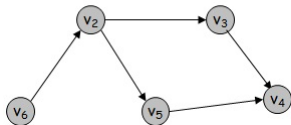
Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Todo grafo direcionado tem um ordem topológica?

Resp: Não



Não tem ordem topologica



Tem duas ordens topologicas

Grafos Direcionados Acíclicos

Perguntas: Quando um grafo possui ordem topológica?

Algoritmo para encontrar ordem topológica, caso exista?

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ ordem topológica

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ não tem ordem topológica

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ não tem ordem topológica

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ não tem ordem topológica

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ não tem ordem topológica

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ não tem ordem topológica

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ não tem ordem topológica

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ não tem ordem topológica

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir de v_i na ordem topológica

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ não tem ordem topológica

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir antes de v_i na ordem topológica

Vamos provar:

G tem ciclo $\Rightarrow G$ não tem ordem topológica

Proposição

Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Prova: Por contradição, suponha que G tem ordem topológica

Considere um ciclo $C \equiv v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k = v_1$ em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordem topológica

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir antes de v_i na ordem topológica

\Rightarrow **contradição** que v_i é o primeiro do ciclo na ordem □

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: E o contrário

G não tem ciclo (DAG) \Rightarrow tem ordem topológica??

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: E o contrário

G não tem ciclo (DAG) \Rightarrow tem ordem topológica??

Resp: Sim!

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: E o contrário

G não tem ciclo (DAG) \Rightarrow tem ordem topológica??

Resp: Sim!

Para provar precisamos de um lema...

Grafos Direcionados Acíclicos

Lema

Todo DAG tem/não tem? um vértice com grau de entrada 0

Grafos Direcionados Acíclicos

Lema

Todo DAG tem um vértice com grau de entrada 0

Provamos anteriormente que se todos os nós tivessem grau de entrada ≥ 1 teria ciclo

Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica:

G não tem ciclo (DAG) \Rightarrow tem ordem topológica

Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica:

G não tem ciclo (DAG) \Rightarrow tem ordem topológica

Prova: Por indução no número de vértices de G

Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica:

G não tem ciclo (DAG) \Rightarrow tem ordem topológica

Prova: Por indução no número de vértices de G

Caso base: G tem apenas um vértice $v \Rightarrow$ ordenação topológica trivial $f(v) = 1$

Passo Indutivo: Considere DAG G com $n + 1$ nós

Pela proposição anterior, G tem um **nó v com grau de entrada 0**

Remova v do grafo, obtendo $G' = G - v$. Como G' é DAG e tem n nós, pela **hipótese indutiva** tem ordenação topológica f'

Crie uma ordenação topológica para o grafo original G colocando o nó v na frente, e continuando com a ordenação de G'

(Mais precisamente, defina a ord. top. f para G fazendo $f(v) = 1$ e $f(u) = f'(u) + 1$ para todo $u \neq v$)

Verifique que pra toda aresta (x, y) em G , $f(x) < f(y)$



Grafos Direcionados Acíclicos

Ou seja, provamos o seguinte:

Teorema

Um grafo direcionado tem uma ordenação topológica se e somente se ele é acíclico:

G tem ordem topológica \Leftrightarrow não tem ciclo

Pergunta: Baseado nessa prova, [algoritmo recursivo](#) para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

Pergunta: Baseado nessa prova, [algoritmo recursivo](#) para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, [algoritmo recursivo](#) para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

$$f(v) = 1$$

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, [algoritmo recursivo](#) para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

$$f(v) = 1$$

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

$$f' \leftarrow \text{OrdemTopologica}(G - v)$$

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, **algoritmo recursivo** para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

$$f(v) = 1$$

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

$$f' \leftarrow \text{OrdemTopologica}(G - v)$$

coloca v na frente dessa ordem

End if

Retorna f

Pergunta: Baseado nessa prova, [algoritmo recursivo](#) para encontrar ordem topológica (caso tenha)?

(No vetor f retornado, $f[v]$ diz a posição do nó v na ordem)

OrdemTopologica(G)

If G tem apenas um vértice v

$$f(v) = 1$$

Else

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

$$f' \leftarrow \text{OrdemTopologica}(G - v)$$

[# coloca \$v\$ na frente dessa ordem](#)

For todo vértice u de $G - v$

$$f(u) \leftarrow f'(u) + 1$$

End for

$$f(v) \leftarrow 1$$

End if

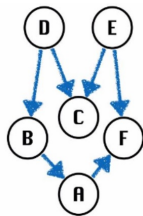
Retorna f

Exercício 1: Prove por indução que para todo grafo direcionado, a soma dos graus de saída é igual ao número de arestas:

$$\sum_v d^+(v) = \# \text{ de arestas}$$

Exercícios

Exercício 2: Quantas ordenações topológicas tem o grafo abaixo:



Exercício 3: Um aluno(a) tem disciplinas a serem feitas para obter seu diploma em Ciência/Engenharia de Computação. Essas disciplinas tem pré-requisitos entre elas, modelado como um DAG G

Dê um algoritmo recursivo $\text{NumSemestres}(G)$ para encontrar o número **mínimo** de semestres necessários para o(a) aluno(a) obter o diploma.

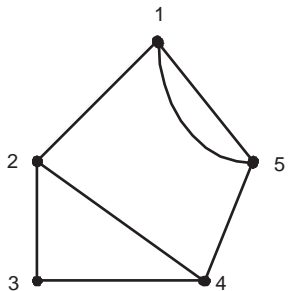
Representações Computacionais

Representações Computacionais

Para poder utilizar os grafos na modelagem e resolução de problemas computacionais, é necessário utilizar estruturas de dados que permitam armazená-los eficientemente em meios digitais.

Matriz de Adjacência – Grafos Não Direcionados

Seja $G = (V, E)$ um grafo, onde $V = \{1, \dots, n\}$. A entrada (i, j) de uma matriz de adjacência indica o número de arestas que tem como extremidades i e j .



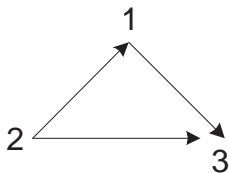
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	2
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	2	0	0	1	0

Matriz de Adjacência – Grafos Não Direcionados

A matriz é simétrica, como podemos observar na Figura. Esta simetria permite guardar somente os elementos da diagonal principal e os elementos abaixo (ou acima) dela. Dessa forma economiza-se espaço no armazenamento da estrutura.

Matriz de Adjacência – Grafos Direcionados

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado, onde $V = \{1, \dots, n\}$. A entrada (i, j) de uma matriz de adjacência indica o número de arestas que tem i como cauda e j como cabeça. Neste caso, a matriz não é necessariamente simétrica:



	1	2	3
1	0	0	1
2	1	0	1
3	0	0	0

Matriz de Adjacência – Grafos Direcionados

Dentre as propriedades das matrizes de adjacências, destacamos:

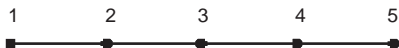
Necessita cerca de n^2 posições de memória.

A existência de uma aresta pode ser testada com uma única operação.

Para listar todos os vértices e arestas do grafo precisamos de cerca de n^2 operações.

Lista de Adjacência

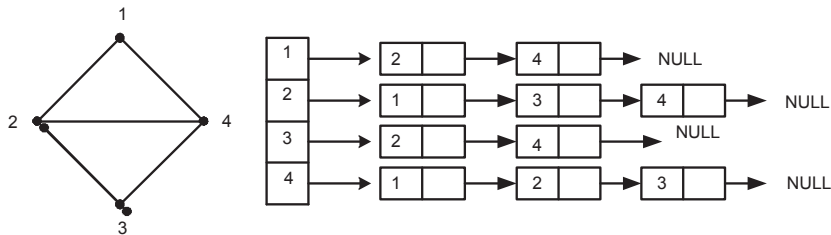
Em muitos casos, lidamos com grafos esparsos, ou seja, com “poucas” arestas. Nesse caso é um desperdício utilizar n^2 posições de memória. A próxima figura mostra um grafo com 5 vértices e 4 arestas, e sua matriz de adjacências. Observe que a maioria das entradas são nulas.



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

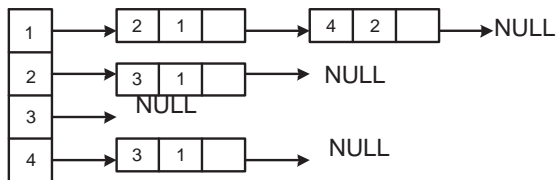
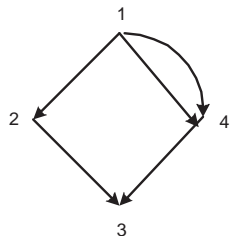
Lista de Adjacência

Uma alternativa para evitar este desperdício, é utilizar um vetor de listas encadeadas, onde a lista correspondente a i -ésima posição guarda os elementos adjacentes ao vértice i .



Lista de Adjacência

Para representar arestas paralelas em listas de adjacências, podemos utilizar um campo extra para guardar a multiplicidade da aresta.



Lista de Adjacência

Dentre as características das listas de adjacências destacamos:

cerca de $n + |E|$ posições de memória são necessárias.

Para descobrir se uma aresta pertence ao grafo, pode ser necessário percorrer uma lista encadeada inteira.

O grafo pode ser percorrido em um tempo proporcional ao número de arestas.