Indução em Árvores: Obs Finais

Provamos ($\pm$) na última aula:

Proposição

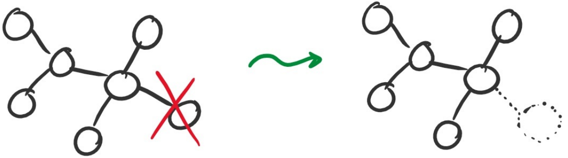
Toda árvore T não vazia tem pelo menos uma folha (nó de grau ≤ 1)

Provamos (±) na última aula:

Proposição

Toda árvore T não vazia tem pelo menos uma folha (nó de grau ≤ 1)

Muito importante para fazer prova por indução no número de nós/arestas de uma árvore:



1 arvore
$n+1$ nós
m arestas

1 arvore
n nos
$m-1$ arestas

⇐ SEMPRE

Provamos ($\pm$) na última aula:

Proposição

Toda árvore T não vazia tem pelo menos uma folha (nó de grau ≤ 1)

Exercício: Reprove por indução removendo folha que pra qualquer árvore #arestas $=$ #nós -1

Métodos de indução em árvores

Temos agora alguns métodos para fazer prova por indução em árvores:

1) Indução no número de arestas: remove aresta, parte em duas árvores

2) Indução no número de nós: geralmente remove **folha**, continua com **1** árvore

3) Árvores binárias **enraizadas**: utiliza subárvores da esquerda/direita

Grafos Eulerianos

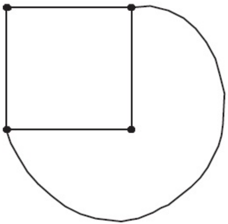
Problema: Todas as ruas de uma cidade tem que ser inspecionadas. Como fazer isso percorrendo a menor distância possível?

Grafos Eulerianos

Problema: Todas as ruas de uma cidade tem que ser inspecionadas. Como fazer isso percorrendo a menor distância possível?

Em linguagem de grafos: Dado um grafo, encontre o menor passeio que cruza cada aresta pelo menos uma vez

(Problema do Carteiro Chinês)

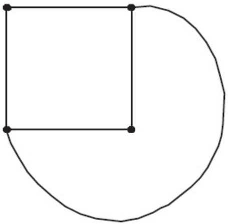


Grafos Eulerianos

Problema: Todas as ruas de uma cidade tem que ser inspecionadas. Como fazer isso percorrendo a menor distância possível?

Em linguagem de grafos: Dado um grafo, encontre o menor passeio que cruza cada aresta pelo menos uma vez

(Problema do Carteiro Chinês)



Nesse caso, a melhor solução é passar exatamente 1 vez em cada aresta

Grafos Eulerianos

Definição

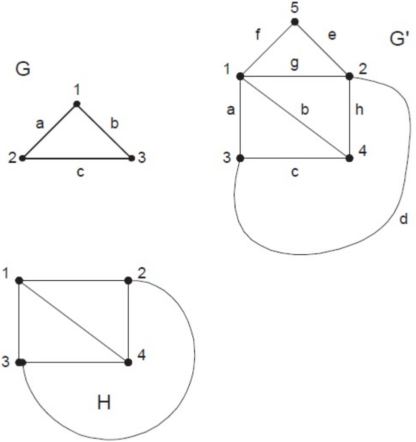
Dado um grafo, um ***trajeto euleriano*** *é um passeio onde cada aresta é visitada exatamente 1 vez*

Grafos Eulerianos

Definição

*Dado um grafo, um **trajeto euleriano** é um passeio onde cada aresta é visitada exatamente 1 vez*

Ex:



Grafos Eulerianos

Perguntas: Quando um grafo possui trajeto euleriano?
Algoritmo para encontrar trajeto euleriano, caso exista?

Grafos Eulerianos

Perguntas: Quando um grafo possui trajeto euleriano?
Algoritmo para encontrar trajeto euleriano, caso exista?

Durante toda a aula só vamos considerar grafos sem loops

Proposição

Considere um grafo G com um trajeto euleriano. Se o grafo possui um vértice v com grau impar, então o trajeto euleriano começa ou termina em v

Proposição

Considere um grafo G com um trajeto euleriano. Se o grafo possui um vértice v com grau impar, então o trajeto euleriano começa ou termina em v

Prova: Considere o trajeto euleriano P (cada aresta aparece exatamente 1 vez). Veja as posições aonde o nó v aparece em P:

Em cada vez que ele aparece no "meio" do trajeto P (não no início ou fim), o trajeto percorre aresta(s) distintas incidentes em v

Proposição

Considere um grafo G com um trajeto euleriano. Se o grafo possui um vértice v com grau impar, então o trajeto euleriano começa ou termina em v

Prova: Considere o trajeto euleriano P (cada aresta aparece exatamente 1 vez). Veja as posições aonde o nó v aparece em P:

Em cada vez que ele aparece no "meio" do trajeto P (não no início ou fim), o trajeto percorre 2 aresta(s) distintas incidentes em v

Se v só aparece no "meio" do trajeto, o trajeto cobriria um número par de arestas incidentes em v $\Rightarrow$ ficaria faltando alguma aresta

Portanto, v precisa aparecer no início ou no fim do trajeto $\square$

Grafos Eulerianos

Como consequência temos o seguinte:

Proposição

Se G tem trajeto euleriano, então possui *nós de grau ímpar*

Grafos Eulerianos

Como consequência temos o seguinte:

Proposição

Se G tem trajeto euleriano, então possui 0 ou 2 nós de grau ímpar

Grafos Eulerianos

Como consequência temos o seguinte:

Proposição

Se G tem trajeto euleriano, então possui 0 ou 2 nós de grau ímpar

Prova: Não pode ter mais do que 2 nós de grau ímpar, pois pela proposição anterior esses nós tem que pertencer ao início/fim do trajeto euleriano

Grafos Eulerianos

Como consequência temos o seguinte:

Proposição

Se G tem trajeto euleriano, então possui 0 ou 2 nós de grau ímpar

Prova: Não pode ter mais do que 2 nós de grau ímpar, pois pela proposição anterior esses nós tem que pertencer ao início/fim do trajeto euleriano

Pelo lema do "Handshaking" que provamos anteriormente, qualquer grafo tem número par de nós de grau ímpar $\Rightarrow$ não pode ter 1 nó de grau impar $\square$

Grafos Eulerianos

Provamos

$$\text{Trajeto Euleriano} \;\Rightarrow\; 0 \text{ ou } 2 \text{ nós de grau impar}$$

Grafos Eulerianos

Provamos

$$\text{Trajeto Euleriano} \;\Rightarrow\; \text{0 ou 2 nós de grau impar}$$

Q: E o contrário??

$$\text{0 ou 2 nós de grau impar} \Rightarrow \text{Trajeto Euleriano??}$$

Grafos Eulerianos

Provamos

$$\text{Trajeto Euleriano} \Rightarrow \text{0 ou 2 nós de grau impar}$$

Q: E o contrário??

$$\text{0 ou 2 nós de grau impar} \Rightarrow \text{Trajeto Euleriano??}$$

A: Sim (desde que seja conexo)!

Grafos Eulerianos

Provamos

Trajeto Euleriano $\Rightarrow$ 0 ou 2 nós de grau impar

Q: E o contrário??

0 ou 2 nós de grau impar $\Rightarrow$ Trajeto Euleriano??

A: Sim (desde que seja conexo)! Vamos provar em duas partes:

0 nós de grau impar $\Rightarrow$ Trajeto Euleriano (fechado)

2 nós de grau impar $\Rightarrow$ Trajeto Euleriano

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Caso base: G tem 0 arestas: pra ser conexo só pode ter 1 nó. Trajeto euleriano trivial, não tem aresta pra visitar!

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Caso base: G tem 0 arestas: pra ser conexo só pode ter 1 nó. Trajeto euleriano trivial, não tem aresta pra visitar!

Passo indutivo: Suponha que resultado valha pra todo grafo com $1, 2, \ldots, m$ arestas. Vamos provar pra grafo G com $m + 1$ arestas

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Caso base: G tem 0 arestas: pra ser conexo só pode ter 1 nó. Trajeto euleriano trivial, não tem aresta pra visitar!

Passo indutivo: Suponha que resultado valha pra todo grafo com $1, 2, \ldots, m$ arestas. Vamos provar pra grafo G com $m + 1$ arestas

Como todos os nós tem grau par e G é conexo, todos os nós tem grau pelo menos

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Caso base: G tem 0 arestas: pra ser conexo só pode ter 1 nó. Trajeto euleriano trivial, não tem aresta pra visitar!

Passo indutivo: Suponha que resultado valha pra todo grafo com $1, 2, \ldots, m$ arestas. Vamos provar pra grafo G com $m + 1$ arestas

Como todos os nós tem grau par e G é conexo, todos os nós tem grau pelo menos 2

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Caso base: G tem 0 arestas: pra ser conexo só pode ter 1 nó. Trajeto euleriano trivial, não tem aresta pra visitar!

Passo indutivo: Suponha que resultado valha pra todo grafo com $1, 2, \ldots, m$ arestas. Vamos provar pra grafo G com $m + 1$ arestas

Como todos os nós tem grau par e G é conexo, todos os nós tem grau pelo menos 2

$\Rightarrow$ tem (já provamos isso)

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

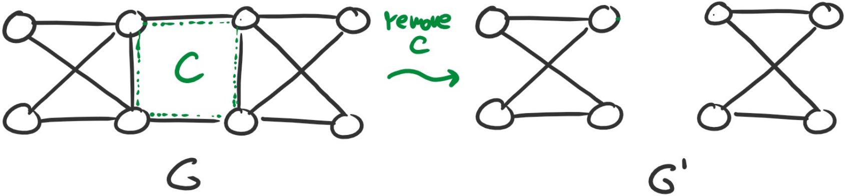
Caso base: G tem 0 arestas: pra ser conexo só pode ter 1 nó. Trajeto euleriano trivial, não tem aresta pra visitar!

Passo indutivo: Suponha que resultado valha pra todo grafo com $1, 2, \ldots, m$ arestas. Vamos provar pra grafo G com $m + 1$ arestas

Como todos os nós tem grau par e G é conexo, todos os nós tem grau pelo menos 2

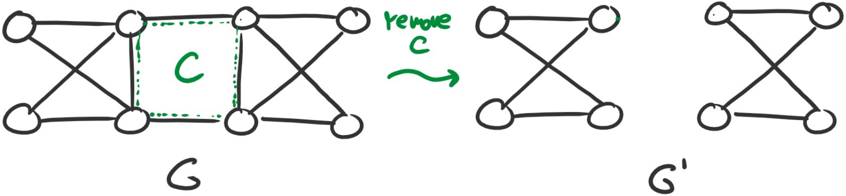
$$\Rightarrow \text{tem ciclo } C \text{ (já provamos isso)}$$

Remova esse ciclo C do grafo, obtendo grafo G'



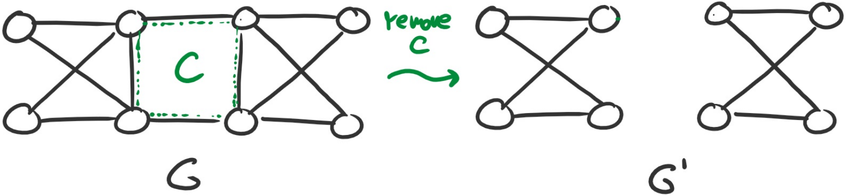
Remova esse ciclo C do grafo, obtendo grafo G'

Removemos exatamente arestas de cada nó no ciclo, 0 de nós fora do ciclo



Remova esse ciclo C do grafo, obtendo grafo G'

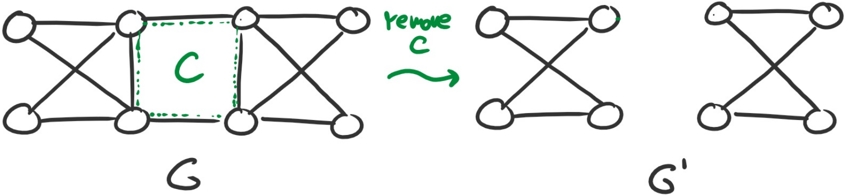
Removemos exatamente 2 arestas de cada nó no ciclo, 0 de nós fora do ciclo



Remova esse ciclo C do grafo, obtendo grafo G'

Removemos exatamente 2 arestas de cada nó no ciclo, 0 de nós fora do ciclo

$\Rightarrow$ não muda paridade $\Rightarrow$ só grau par em G'

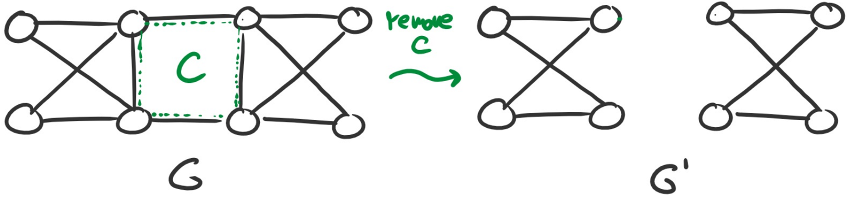


Remova esse ciclo C do grafo, obtendo grafo G'

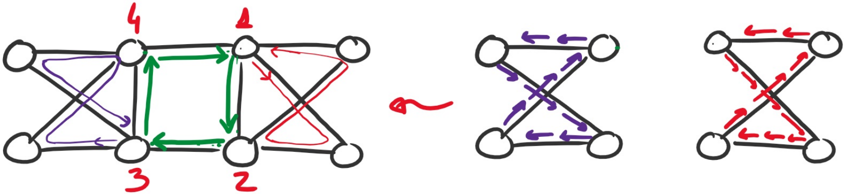
Removemos exatamente 2 arestas de cada nó no ciclo, 0 de nós fora do ciclo

$\Rightarrow$ não muda paridade $\quad \Rightarrow$ só grau par em G'

Pela **hipótese indutiva**, cada componente de G' tem trajeto euleriano fechado



Construímos trajeto euleriano fechado para o grafo original G:



Trajeto: 1 → 1 → 2 → 3 → 3 → 4 → 1

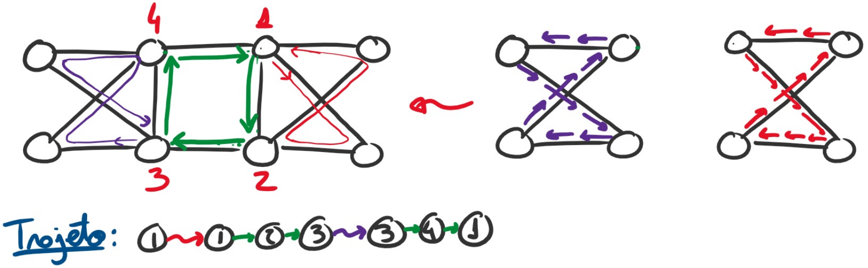
$\square$

Construímos trajeto euleriano fechado para o grafo original G:

1) Caminhe no ciclo C começando em qualquer nó

2) Ao encontrar nó v de um componente de G' que ainda não foi percorrido, percorra usando seu trajeto euleriano, iniciando e terminando em v

3) Prossiga caminhando em C, repetindo o processo



$\square$

Agora o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Agora o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: Redução pro caso com 0 nós de grau ímpar

Agora o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

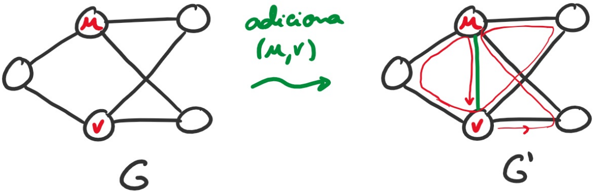
Prova:

Agora o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: Sejam u e v os nós de grau impar. Adicione aresta (u, v) a G, obtendo o grafo G' (pode não ser simples, não tem problema)



$\square$

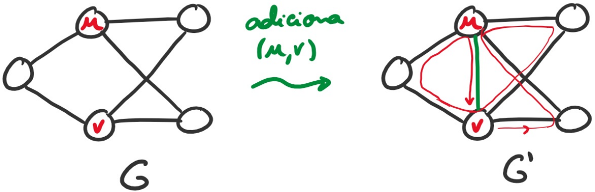
Agora o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: Sejam u e v os nós de grau impar. Adicione aresta (u, v) a G, obtendo o grafo G' (pode não ser simples, não tem problema)

Agora todos os nós tem grau



$\square$

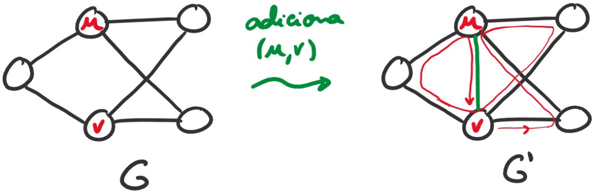
Agora o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: Sejam u e v os nós de grau impar. Adicione aresta (u, v) a G, obtendo o grafo G' (pode não ser simples, não tem problema)

Agora todos os nós tem grau par



□

Agora o caso com 2 nós de grau impar

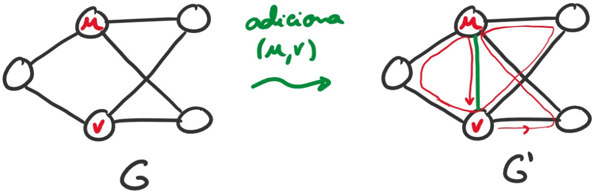
Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: Sejam u e v os nós de grau impar. Adicione aresta (u, v) a G, obtendo o grafo G' (pode não ser simples, não tem problema)

Agora todos os nós tem grau par

Pela proposição anterior, G' tem trajeto euleriano fechado P'



$\square$

Agora o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

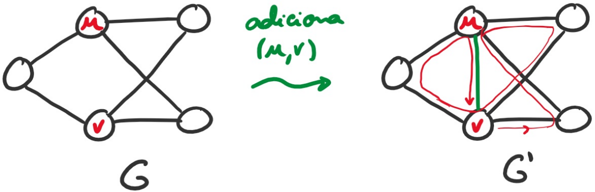
Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: Sejam u e v os nós de grau impar. Adicione aresta (u, v) a G, obtendo o grafo G' (pode não ser simples, não tem problema)

Agora todos os nós tem grau par

Pela proposição anterior, G' tem trajeto euleriano fechado P'

Removendo aresta (u, v) que adicionamos de P' obtemos trajeto euleriano para G que começa em u e termina em v



$\square$

Grafos eulerianos

Em resumo: Provamos a seguinte caracterização de grafos com trajeto euleriano:

Teorema

Um grafo tem trajeto euleriano se e somente se tem 0 ou 2 nós de grau ímpar

Trajeto Euleriano $\Leftrightarrow$ 0 ou 2 nós de grau impar

Exercícios

Exercício 1: Diga se os grafos abaixo tem ou não trajeto euleriano. Se tiver encontre-o, se não tiver justifique.

Exercício 2: Prove: Se G tem 2 nós de grau impar, então não tem trajeto Euleriano fechado

Exercício 3: Baseado nas provas acima, descreva **com palavras e em muito alto nível** um procedimento para se encontrar um **ciclo euleriano** caso exista.