Grafos

1) Considere o grafo G não direcionado abaixo. Suponha que o grafo G tenha um trajeto Euleriano. Prove que:

a) Esse trajeto é aberto, ou seja, começa e termina em nós diferentes

b) Os subgrafos G1 e G2 ambos tem trajeto Euleriano

2) Considere um grafo nao-direcionado conexo G. Suponha que G tem exatamente 4 nós de grau impar. Mostre que G tem 2 trajetos P1 e P2 que coletivamente passam exatamente 1 vez por cada arestas do grafo.

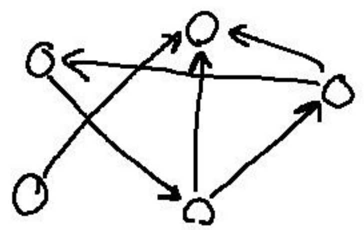
   Dica: Lembre como provamos que se G tem 2 nós de grau impar, então tem um trajeto (Euleriano) passando por todas as arestas)

3) Prove por indução que para qualquer grafo direcionado, a **soma dos graus de saída** é igual ao **número total de arestas**

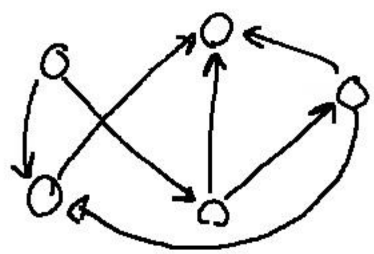
4) Prove que todo grafo direcionado acíclico tem um nó com **grau de saída** igual a 0

5) Para cada um dos grafos abaixo, diga se ele possui ordenação topológica ou não, e justifique:

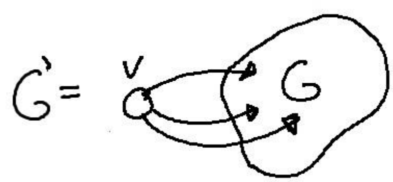
   a)



b)



6) Considere um grafo direcionado G que possui ordenacao topologica v1,v2,...vn. Monte o grafo G’ adicionando ao grafo G um nó v com aresta **para** algums nós de G:

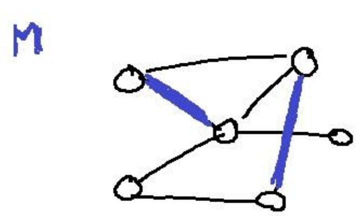


(Note que **não** há arestas indo **de G para v.**) De uma ordenação topológica para G’.

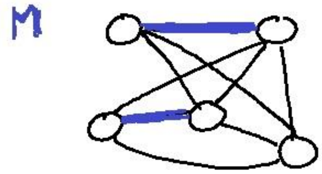
Verdadeiro ou falso: em uma execução (completa) do algoritmo Dijkstra, calculamos o tamanho do caminho mais curto da origem s a **todos os outros nós**

7) Em cada item abaixo, temos um grafo G e um emparelhamento M. Para cada item, exiba um **caminho aumentante** com relacao a M, ou argumente que tal não existe.

a)

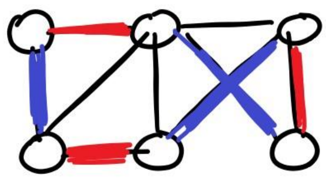


b)

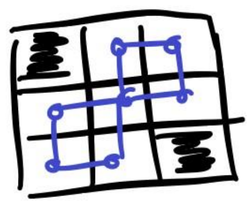


8) Suponha que um grafo G tem 2 emparelhamentos perfeitos diferentes M1 e M2. Mostre que as arestas M1 ∪ M2 contém um ciclo (pode conter mais de um).

   Por exemplo, no grafo abaixo os emparelhamentos perfeitos em azul e vermelho formam um ciclo que percorre o grafo todo.



9) Considere um tabuleiro de xadrez 3x3 com dois cantos removidos. Vamos provar que nao existe como cobrir esse tabuleiro com peças 2x1 e 1x2.



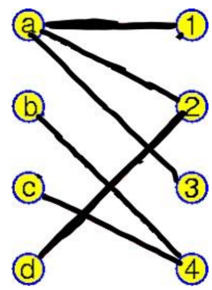
   a) Considere o acima grafo em azul, cujos nós correspondem a casas e as arestas conectam casas adjacentes. Mostre que esse grafo é bipartido

   b) Prove que esse grafo não tem um emparelhamento perfeito (note que um emparelhamento perfeito equivale a cobrir as casas com peças 2x1 e 1x2)

10) Considere um grafo G com a seguinte propriedade: existe um conjunto S de 2 vértices tal que G-S (o grafo obtido ao remover esses vértices) tem 2 componentes conexo, um com número impar de vértices e o outro com número par de vértices.

    Esse grafo G tem um emparelhamento perfeito? Justifique

11) Utilizando o Teorema de Hall, mostre que o grafo abaixo não possui um emparelhamento perfeito



12) Mostre que todo grafo bipartido onde **todos os nós tem grau k** satisfaz a condição do Teorema de Hall: N(S) >= S para todo conjunto de nós S em um lado do grafo.

13) Prove por indução no número de nós que toda árvore é bipartida (ou seja tem número cromático 2) [Somente nesse exercício, você **não** pode utilizar a caracterização de grafos bipartidos que vimos em aula]

14) Considere dois grafos G1 e G2 com número cromático 3. Construa o grafo G como na figura abaixo. Qual é o número cromático de G?