# Coloração de Vértices

# Coloração

Temos que armazenar 5 compostos químicos, A, B, C, D e E em recipientes

# Coloração

Temos que armazenar 5 compostos químicos, A, B, C, D e E em recipientes

Para evitar contaminação os seguinte pares não podem ser armazenados no mesmo recipiente: A-B, A-C, D-E, C-D

# Coloração

Temos que armazenar 5 compostos químicos, A, B, C, D e E em recipientes

Para evitar contaminação os seguinte pares não podem ser armazenados no mesmo recipiente: A-B, A-C, D-E, C-D

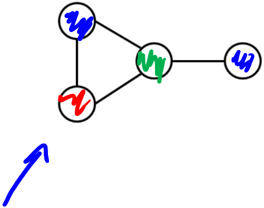
Neste caso, qual o número mínimo de recipientes que precisamos?

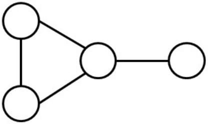
# Coloração

Novamente, hoje grafos são não-direcionados

**Definição (Coloração)**

*Uma **coloração dos vértices** de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices onde vértices adjacentes recebem cores diferentes*





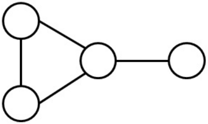
# Coloração

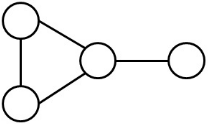
Novamente, hoje grafos são não-direcionados

### Definição (Coloração)

*Uma* ***coloração dos vértices*** *de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices onde vértices adjacentes recebem cores diferentes*

$\chi(G)=3$





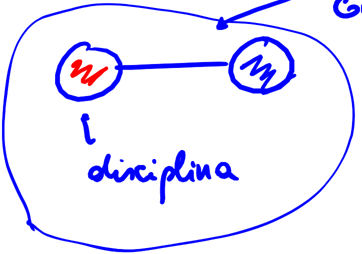
### Definição (Número cromático)

*O* ***número cromático*** *de um grafo $G$, denotado $\chi(G)$, é o menor número de cores possíveis para uma coloração*

**Aplicações:** Arestas representam conflitos

**Ex:** (Atribuição de salas) Dada a grade de disciplinas da PUC para o próximo período (disciplinas com horários já definidos), quantas salas de aulas são necessárias?

Conflito de hora




← Cores ≡ salas

# Coloração

**Aplicações:** Arestas representam conflitos

**Ex:** (Atribuição de salas) Dada a grade de disciplinas da PUC para o próximo período (disciplinas com horários já definidos), quantas salas de aulas são necessárias?

– Alocação de transporte
– Alocação de registradores por um compilador
– Sudoku
...

(Livro "A Guide to Graph Coloring", Lewis)

# Coloração

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

# Coloração

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

# Coloração

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

# Coloração

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Resp: 2

# Coloração

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Resp: 2

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um grafo bipartido?

# Coloração

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

**Pergunta:** Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Resp: 2

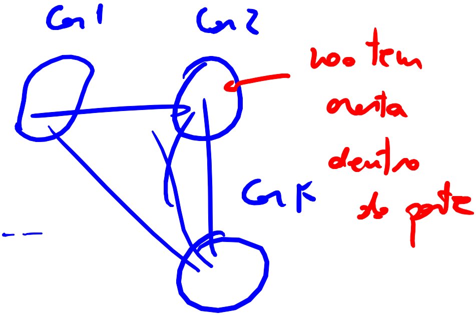
**Pergunta:** Qual é o número cromático de um grafo bipartido?

Resp: 2

Número cromático $\chi(G) = k \equiv G$ é *k-partido*

k-part $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq k$ ✓

$\chi(G) = k$ $\Rightarrow$ k-part



# Coloração

**Cotas superiores:** Certamente $\chi(G) \leq \#$ nós

# Coloração

**Cotas superiores:** Certamente $\chi(G) \leq \#$ nós

Mas intuitivamente, se o grafo tem poucas arestas o número cromático deve ser pequeno

# Coloração

**Cotas superiores:** Certamente $\chi(G) \leq \#$ nós

Mas intuitivamente, se o grafo tem poucas arestas o número cromático deve ser pequeno

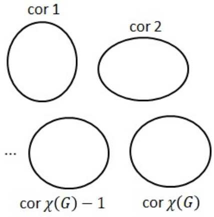
**Proposição**

*Pra todo grafo,* $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

## Proposição

*Pra todo grafo,* $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

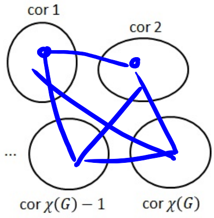
**Prova:** Considere uma coloração de $G$ com $\chi(G)$ cores



## Proposição

*Pra todo grafo,* $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

**Prova:** Considere uma coloração de $G$ com $\chi(G)$ cores

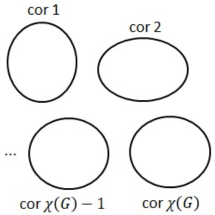



Pra cada par de cores diferentes, tem pelo menos uma aresta conectando essas cores, senão dava para reduzir o número de cores

## Proposição

*Pra todo grafo,* $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

**Prova:** Considere uma coloração de $G$ com $\chi(G)$ cores



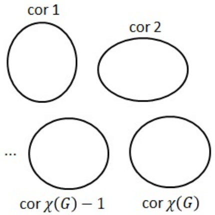

Pra cada par de cores diferentes, tem pelo menos uma aresta conectando essas cores, senão dava para reduzir o número de cores

Então **#arestas** $\geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$

## Proposição

*Pra todo grafo,* $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

**Prova:** Considere uma coloração de $G$ com $\chi(G)$ cores




Pra cada par de cores diferentes, tem pelo menos uma aresta conectando essas cores, senão dava para reduzir o número de cores

Então $\textbf{\#arestas} \geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$

Ou seja, $\textbf{\#arestas} \gtrsim \frac{\chi(G)^2}{2} \Rightarrow \chi(G) \lesssim \sqrt{2 \cdot \textbf{\#arestas}}$ $\square$

# Coloração

Além disso, se os graus dos nós de $G$ são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

# Coloração

Além disso, se os graus dos nós de $G$ são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

## Proposição

*Para qualquer grafo simples* $G$, $\chi(G) \leq$ *maior grau* $+ 1$

**Prova:** Por indução no número de vértices

# Coloração

Além disso, se os graus dos nós de $G$ são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

## Proposição

*Para qualquer grafo simples* $G$, $\chi(G) \leq$ *maior grau* $+ 1$

**Prova:** Por indução no número de vértices

**Caso base:** 0 vértices, ok $\chi(G) = 0 \leq 0 + 1$

## Proposição

*Para qualquer grafo simples $G$, $\chi(G) \leq$ maior grau $+ 1$*

**Prova:** Por indução no número de nós

## Proposição

*Para qualquer grafo simples* $G$, $\chi(G) \leq$ *maior grau* $+ 1$

**Prova:** Por indução no número de nós

**Caso base:** 0 vértices, ok

## Proposição

*Para qualquer grafo simples $G$, $\chi(G) \leq$ maior grau $+ 1$*

**Prova:** Por indução no número de nós

**Caso base:** 0 vértices, ok

**Passo indutivo:** Suponha que a proposição vale para para todo grafo com $n$ nós

## Proposição

*Para qualquer grafo simples $G$, $\chi(G) \leq$ maior grau $+ 1$*

**Prova:** Por indução no número de nós

**Caso base:** 0 vértices, ok

**Passo indutivo:** Suponha que a proposição vale para para todo grafo com $n$ nós

Considere grafo $G$ com $n + 1$ nós. Considere um nó qualquer $v$ de $G$

## Proposição

*Para qualquer grafo simples $G$, $\chi(G) \leq$ maior grau $+ 1$*

**Prova:** Por indução no número de nós

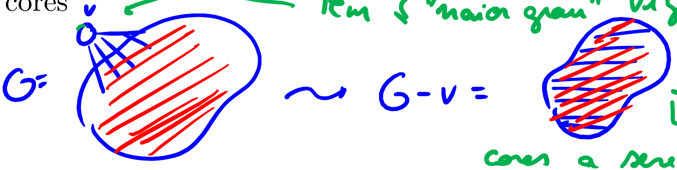
**Caso base:** 0 vértices, ok

**Passo indutivo:** Suponha que a proposição vale para para todo grafo com $n$ nós

Considere grafo $G$ com $n + 1$ nós. Considere um nó qualquer $v$ de $G$

Usando a **hipótese indutiva**, colora $G - v$ com [maior grau $+ 1$] cores

tem $\leq$ "maior grau" vizinhos,




mas tenho [maior grau + 1] cores a serem usadas

$\Longrightarrow$ tem cor que não foi

## Proposição

*Para qualquer grafo simples* $G$, $\chi(G) \leq \textit{maior grau} + 1$

**Prova:** Por indução no número de nós

**Caso base:** 0 vértices, ok

**Passo indutivo:** Suponha que a proposição vale para para todo grafo com $n$ nós

Considere grafo $G$ com $n + 1$ nós. Considere um nó qualquer $v$ de $G$

Usando a **hipótese indutiva**, colora $G - v$ com [maior grau + 1] cores

Como $v$ tem no máximo [maior grau] vizinhos, uma dessas cores não aparece em algum vizinho de $v$

$\Rightarrow$ use essa cor em $v$ para obter uma coloração do grafo $G$ total

# Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

# Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

Vamos caracterizar grafos bipartidos

# Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

Vamos caracterizar grafos bipartidos

**Proposição**

*Todo ciclo ímpar tem número cromático* 3

**Prova:** Exercício

# Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

Vamos caracterizar grafos bipartidos

**Proposição**

*Todo ciclo ímpar tem número cromático* 3

Então temos a seguinte consequência:

**Proposição**

*Considere um grafo* $G$. *Se ele tem ciclo ímpar, então* $G$ *não é bipartido*

# Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

Vamos caracterizar grafos bipartidos

**Proposição**

*Todo ciclo ímpar tem número cromático* 3

Então temos a seguinte consequência:

**Proposição**

*Considere um grafo $G$. Se ele tem ciclo ímpar, então $G$ não é bipartido*

**Prova:** Se não tem como colorir o ciclo de $G$ com 2 cores, então não tem como colorir $G$ com 2 cores

Tem também o inverso

**Proposição**

*Se $G$ não tem ciclo impar, então $G$ é bipartido*

Tem também o inverso

**Proposição**

*Se $G$ não tem ciclo impar, então $G$ é bipartido*

**Prova:** Considere um nó $s$ qualquer. Seja $L_i$ o conjunto de nós com distância $i$ de $s$

Pinte as "camadas" $L_i$ de forma alternada com 2 cores: $L_0$ azul, $L_1$ vermelho, $L_2$ azul, etc.
(ou seja, pra $i$ par pinte de azul, pra $i$ impar pinte de vermelho)

Precisamos mostrar é coloração, ou seja, não existe aresta com ambas as pontas azul (camada par) ou ambas as pontas vermelho (camada impar)

Vamos mostrar que não tem aresta azul/azul
(o caso vermelho/vermelho é idêntico)

Por contradição, suponha que tenha aresta entre nós $u \in L_i$ e $v \in L_j$ onde $i$ e $j$ são par (azul)

Considere o caminho mais curto de $s$ a $u$, e de $s$ a $v$. Seja $w$ o último nó comum nesses caminhos

$\Rightarrow$ temos o ciclo $w \rightsquigarrow u - v \rightsquigarrow w$

Além disso, esse ciclo é impar: os caminhos $w \rightsquigarrow u$ e $v \rightsquigarrow w$ tem a mesma paridade $\Rightarrow$ contradição que $G$ não tem ciclo impar

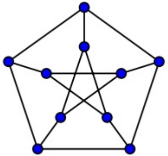
# Coloração

Juntas essas proposições dão a seguinte caracterização de grafos bipartidos:

**Teorema**

*$G$ é bipartido se e somente se não tem ciclo impar*

**Exercício 1:** Encontre o número cromático do grafo abaixo



**Exercício 2:** O que acontece com o número cromático quando adicionamos uma aresta? E quando removemos uma aresta?

**Exercício 3:** Considere um grafo $G$ com 2 componentes conexos. Relacione o número cromático de $G$ com o de seus componentes conexos

# Exercícios

**Exercício 4:** Dado grafo, um *conjunto independente* é um conjunto de nós que não tem nenhuma aresta entre eles

Considere um grafo $G$ com 100 nós cujo maior conjunto independente tem tamanho 25. O número cromático de $G$ pode ser 3?