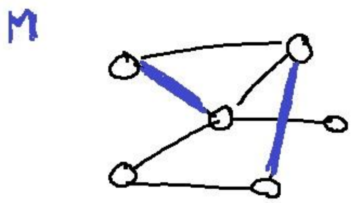
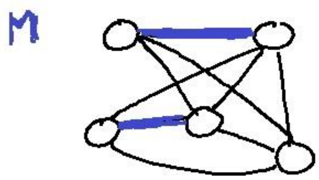
Grafos

1) Em cada item abaixo, temos um grafo G e um emparelhamento M. Para cada item, exiba um **caminho aumentante** com relacao a M, ou argumente que tal não existe.

   a)

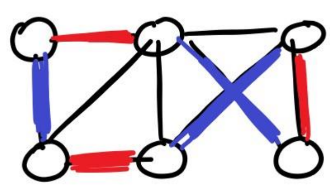


   b)

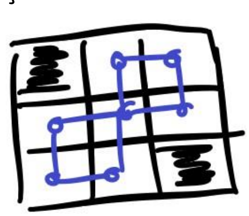


2) Suponha que um grafo G tem 2 emparelhamentos perfeitos diferentes M1 e M2. Mostre que as arestas M1 ∪ M2 contém um ciclo (pode conter mais de um).

   Por exemplo, no grafo abaixo os emparelhamentos perfeitos em azul e vermelho formam um ciclo que percorre o grafo todo.



3) Considere um tabuleiro de xadrez 3x3 com dois cantos removidos. Vamos provar que nao existe como cobrir esse tabuleiro com peças 2x1 e 1x2.



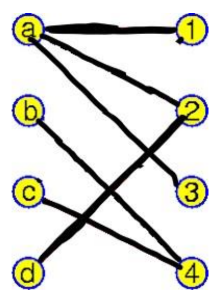
a) Considere o acima grafo em azul, cujos nós correspondem a casas e as arestas conectam casas adjacentes. Mostre que esse grafo é bipartido

b) Prove que esse grafo não tem um emparelhamento perfeito (note que um emparelhamento perfeito equivale a cobrir as casas com peças 2x1 e 1x2)

4) Considere um grafo G com a seguinte propriedade: existe um conjunto S de 2 vértices tal que G-S (o grafo obtido ao remover esses vértices) tem 2 componentes conexo, um com número impar de vértices e o outro com número par de vértices.

   Esse grafo G tem um emparelhamento perfeito? Justifique

5) Utilizando o Teorema de Hall, mostre que o grafo abaixo não possui um emparelhamento perfeito

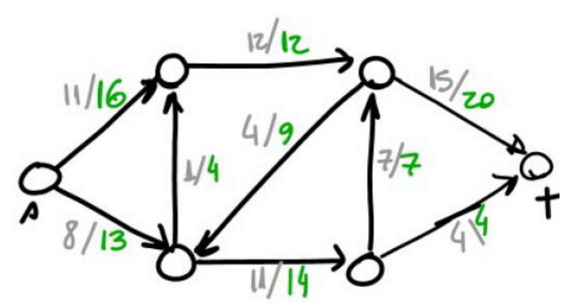


6) Mostre que todo grafo bipartido onde **todos os nós tem grau k** satisfaz a condição do Teorema de Hall: N(S) >= S para todo conjunto de nós S em um lado do grafo.

7) Prove por indução no número de nós que toda árvore é bipartida (ou seja tem número cromático 2) [Somente nesse exercício, você **não** pode utilizar a caracterização de grafos bipartidos que vimos em aula]

8) Considere dois grafos G1 e G2 com número cromático 3. Construa o grafo G como na figura abaixo. Qual é o número cromático de G?

9) Considere a situação abaixo (onde os números em verde são as capacidades das arestas, e os números em cinza representam um fluxo)



a) Desenhe a rede residual com relação a esse fluxo

b) Encontre o fluxo máximo s-t nesse grafo, começando a partir do fluxo dado acima

c) Prove que o fluxo que voce encontrou é máximo usando um corte no grafo