Princípios de Contagem e Enumeração Computacional

Objetivos

Contar/listar o número de elementos de conjuntos finitos

Aplicações

Objetivos

Contar/listar o número de elementos de conjuntos finitos

Aplicações

- Determinar número de operações realizadas por um algoritmo

Objetivos

Contar/listar o número de elementos de conjuntos finitos

Aplicações

- Determinar número de operações realizadas por um algoritmo
- Básico de probabilidade

Objetivos

Exemplo

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}, *e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

Objetivos

Exemplo

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade L_i para localidade L_j é c_{ij}, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.

P1) Quantos trajetos distintos o caminhão pode percorrer?

Objetivos

Exemplo

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}*, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

P1) Quantos trajetos distintos o caminhão pode percorrer?

P2) Qual o trajeto que minimiza o consumo do caminhão?

Objetivos

Exemplo

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade L_i para localidade L_j é c_{ij}, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.

P1) Quantos trajetos distintos o caminhão pode percorrer?

– 12 possibilidades para a primeira parada, 11 para a segunda, etc.

P2) Qual o trajeto que minimiza o consumo do caminhão?

Objetivos

Exemplo

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}*, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

P1) Quantos trajetos distintos o caminhão pode percorrer?

– 12 possibilidades para a primeira parada, 11 para a segunda, etc.
– Total: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 12! = 63.228.211.200$

P2) Qual o trajeto que minimiza o consumo do caminhão?

Objetivos

Exemplo

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}*, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

P1) Quantos trajetos distintos o caminhão pode percorrer?

– 12 possibilidades para a primeira parada, 11 para a segunda, etc.
– Total: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 12! = 63.228.211.200$

P2) Qual o trajeto que minimiza o consumo do caminhão?

– Possível solução é gerar todos os possíveis trajetos

Objetivos

Esse é o problema Traveling Salesman Problem (TSP)

Objetivos

Esse é o problema Traveling Salesman Problem (TSP)

Não é conhecido nenhum algoritmo eficiente para resolver TSP

Objetivos

Esse é o problema Traveling Salesman Problem (TSP)

Não é conhecido nenhum algoritmo eficiente para resolver TSP

Existência implicaria P = NP. Vale USD 1.000.00

Objetivos

Esse é o problema Traveling Salesman Problem (TSP)

Não é conhecido nenhum algoritmo eficiente para resolver TSP

Existência implicaria P = NP. Vale USD 1.000.00

Melhores algoritmos utilizam enumeração parcial, de forma esperta (Programação Inteira)

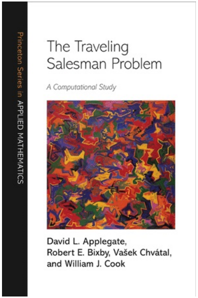
Objetivos

Esse é o problema Traveling Salesman Problem (TSP)

Não é conhecido nenhum algoritmo eficiente para resolver TSP

Existência implicaria P = NP. Vale USD 1.000.00

Melhores algoritmos utilizam enumeração parcial, de forma esperta (Programação Inteira)



15,112 Cities in Germany
Solved in 2001

24,978 Cities in Sweden
Solved in 2004

Princípio da Multiplicação

Esse argumento é exemplo de princípio fundamental: princípio da multiplicação

Princípio da Multiplicação

Esse argumento é exemplo de princípio fundamental: princípio da multiplicação

- Considere eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$

Princípio da Multiplicação

Esse argumento é exemplo de princípio fundamental: princípio da multiplicação

- Considere eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$
- Evento E_i pode ocorrer de n_i formas diferentes, independente dos outros eventos

Princípio da Multiplicação

Esse argumento é exemplo de princípio fundamental: princípio da multiplicação

- Considere eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$
- Evento E_i pode ocorrer de n_i formas diferentes, independente dos outros eventos
- Então a sequência de eventos $E_1 E_2 E_3 \ldots E_k$ pode ocorrer de

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$$

formas diferentes

Princípio da Multiplicação

Exemplo

Em uma placa de carro, as três primeiras posições são letras e as quatro restantes são dígitos. Quantas placas distintas são possíveis?

Princípio da Multiplicação

Exemplo

Em uma placa de carro, as três primeiras posições são letras e as quatro restantes são dígitos. Quantas placas distintas são possíveis?

Evento E_i: atribuir letra/digito a i-ésima posição

Princípio da Multiplicação

Exemplo

Em uma placa de carro, as três primeiras posições são letras e as quatro restantes são dígitos. Quantas placas distintas são possíveis?

Evento E_i: atribuir letra/digito a i-ésima posição

Temos 26 possibilidades para eventos E_i com $i = 1, 2, 3$
10 possibilidades para eventos E_i com $i = 4, 5, 6, 7$

Princípio da Multiplicação

Exemplo

Em uma placa de carro, as três primeiras posições são letras e as quatro restantes são dígitos. Quantas placas distintas são possíveis?

Evento E_i: atribuir letra/digito a i-ésima posição

Temos 26 possibilidades para eventos E_i com $i = 1, 2, 3$
10 possibilidades para eventos E_i com $i = 4, 5, 6, 7$

Pelo princípio da multiplicação, o número de placas é $26^3 \cdot 10^4$.

Princípio da Multiplicação

Exemplo (TSP)

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}*, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

Princípio da Multiplicação

Exemplo (TSP)

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}*, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

Quantos possíveis trajetos?

Princípio da Multiplicação

Exemplo (TSP)

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}*, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

Note que não queremos revisitar a mesma localidade (sem repetição)

Princípio da Multiplicação

Exemplo (TSP)

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade L_i para localidade L_j é c_{ij}, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.

Note que não queremos revisitar a mesma localidade (sem repetição)

Evento E_i: atribuir i-ésima localidade a ser visitada

Princípio da Multiplicação

Exemplo (TSP)

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}*, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

Note que não queremos revisitar a mesma localidade (sem repetição)

Evento E_i: atribuir i-ésima localidade a ser visitada

Número de possibilidades do evento E_i ainda é independente dos outros eventos

Princípio da Multiplicação

Exemplo (TSP)

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}*, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

Note que não queremos revisitar a mesma localidade (sem repetição)

Evento E_i: atribuir i-ésima localidade a ser visitada

Número de possibilidades do evento E_i ainda é independente dos outros eventos

Número de possibilidade evento E_1 é 12, E_2 é 11, etc.

Princípio da Multiplicação

Exemplo (TSP)

Considere um caminhão que necessita entregar mercadorias em 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$ *ao longo de um dia. Sabe-se que o consumo médio para ir da localidade* L_i *para localidade* L_j *é* c_{ij}*, e que o caminhão deve partir de sua garagem e retornar para mesma.*

Note que não queremos revisitar a mesma localidade (sem repetição)

Evento E_i: atribuir i-ésima localidade a ser visitada

Número de possibilidades do evento E_i ainda é independente dos outros eventos

Número de possibilidade evento E_1 é 12, E_2 é 11, etc.

Pelo princípio da multiplicação, número de trajetos é
$12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 1 = 12!$

Princípio da Multiplicação

Exemplo

Considere o trecho de código abaixo

```
Para i=1,...ℓ
    Para j=1,...m
        Para k=1,...n
            PRINT("OI")
```

Q: Quantas vezes o código imprime 'OI'?

Princípio da Multiplicação

Exemplo

Considere o trecho de código abaixo

```
Para i=1,...ℓ
    Para j=1,...m
        Para k=1,...n
            PRINT("OI")
```

Q: Quantas vezes o código imprime 'OI'?

A: $\ell \cdot m \cdot n$

Exercicios

Exercício 1: Quantas funções existem de um conjunto com n elementos a um conjunto com m elementos?

Exercício 2: Use a regra do produto para mostrar que o número de subconjuntos de um conjunto S é $2^{|S|}$

Permutações

Permutações

Número de sequências de r objetos distintos que podem ser formadas a partir de um conjunto de n objetos distintos

Permutações

Número de sequências de r objetos distintos que podem ser formadas a partir de um conjunto de n objetos distintos

Ordem importa

Permutações

Número de sequências de r objetos distintos que podem ser formadas a partir de um conjunto de n objetos distintos

Ordem importa

Geralmente vamos chamar essa quantidade de $P(n, r)$

Permutações

Número de sequências de r objetos distintos que podem ser formadas a partir de um conjunto de n objetos distintos

Ordem importa

Geralmente vamos chamar essa quantidade de $P(n, r)$

Ja vimos problemas assim:

- Permutações de um conjunto $(n = p) \equiv$ Traveling Salesman Problem

Permutações

Exemplo

Sejam $n = 4$ objetos $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ e $r = 2$. Quantas são as sequências possíveis de 2 objetos distintos?

Evento $E_1 =$ objeto na primeira posição
$E_2 =$ objeto na segunda posição

Permutações

Exemplo

Sejam $n = 4$ objetos $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ e $r = 2$. Quantas são as sequências possíveis de 2 objetos distintos?

Evento E_1 = objeto na primeira posição
E_2 = objeto na segunda posição

E_1 tem 4 possibilidades, E_2 tem 3 possibilidades

Exemplo

Sejam $n = 4$ objetos $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ e $r = 2$. Quantas são as sequências possíveis de 2 objetos distintos?

Evento E_1 = objeto na primeira posição
E_2 = objeto na segunda posição

E_1 tem 4 possibilidades, E_2 tem 3 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades

Permutações

Em geral, aplicando o princípio multiplicativo, obtemos que

$$P(n,r) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutações

Exemplo

De quantas maneiras podem ser escolhidos o presidente e o vice-presidente de uma empresa, a partir de um grupo de 20 funcionários?

Permutações

Exemplo (Variante TSP)

Existem 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$, *sabemos o custo* c_{ij} *de ir de* L_i *a* L_j. *Um caminhao so pode entregar 4 mercadorias hoje. Se entregar a mercadoria na localidade* L_i, *ganha* g_i

Desejamos escolher em quais 4 localidades entregar, e em que ordem, de modo a maximizar lucro (ganho - custo)

Permutações

Exemplo (Variante TSP)

Existem 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$, *sabemos o custo* c_{ij} *de ir de* L_i *a* L_j. *Um caminhao so pode entregar 4 mercadorias hoje. Se entregar a mercadoria na localidade* L_i, *ganha* g_i

Desejamos escolher em quais 4 localidades entregar, e em que ordem, de modo a maximizar lucro (ganho - custo)

Q: Quantas possíveis soluções existem para esse problema?

Exemplo (Variante TSP)

Existem 12 localidades $\{L_1, \ldots, L_{12}\}$*, sabemos o custo* c_{ij} *de ir de* L_i *a* L_j*. Um caminhao so pode entregar 4 mercadorias hoje. Se entregar a mercadoria na localidade* L_i*, ganha* g_i

Desejamos escolher em quais 4 localidades entregar, e em que ordem, de modo a maximizar lucro (ganho - custo)

Q: Quantas possíveis soluções existem para esse problema?

A: $P(12, 4) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11.880$

Permutações

Podemos ter restrições nas permutações

Permutações

Podemos ter restrições nas permutações

Temos que usar principio da multiplicação várias vezes

Permutações

Podemos ter restrições nas permutações

Temos que usar principio da multiplicação várias vezes

Exemplo

Quantas são as permutações da palavra BULGARO que não possuem duas vogais em posições consecutivas?

Permutações

Podemos ter restrições nas permutações

Temos que usar principio da multiplicação várias vezes

Exemplo

Quantas são as permutações da palavra BULGARO que não possuem duas vogais em posições consecutivas?

Podemos tomar decisão para construir essas permutações da seguinte forma:

- Decidir ordem das consoantes BLGR (evento E_1)
- Decidir posição vogal U (evento E_2)
- Decidir posição vogal A (evento E_3)
- Decidir posição vogal O (evento E_4)

Permutações

Podemos ter restrições nas permutações

Temos que usar principio da multiplicação várias vezes

Exemplo

Quantas são as permutações da palavra BULGARO que não possuem duas vogais em posições consecutivas?

Podemos tomar decisão para construir essas permutações da seguinte forma:

- Decidir ordem das consoantes BLGR (evento E_1) 4! poss
- Decidir posição vogal U (evento E_2) 5 poss
- Decidir posição vogal A (evento E_3) 4 poss
- Decidir posição vogal O (evento E_4) 3 poss

Total: $4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

Permutações

Exemplo

Uma companhia de entrega entrega 3 tipos de produtos: eletronicos, roupas, e comida. Um caminhão precisa fazer 4 entregas de eletronicos, 7 de roupas, e 3 de comida.

Existe uma restrição de que todos os produtos do mesmo tipo tem que ser entregue de forma consecutiva (e.g., entregar todos os eletronicos, depois todas as roupas, depois todas as comidas)

Permutações

Exemplo

Uma companhia de entrega entrega 3 tipos de produtos: eletronicos, roupas, e comida. Um caminhão precisa fazer 4 entregas de eletronicos, 7 de roupas, e 3 de comida.

Existe uma restrição de que todos os produtos do mesmo tipo tem que ser entregue de forma consecutiva (e.g., entregar todos os eletronicos, depois todas as roupas, depois todas as comidas)

Q: Quantos trajetos são possíveis? (Note que consideramos a ordem em que os produtos do mesmo tipo são entregues.)

Permutações

Possibilidades para a sequencia de tipos de produtos (eletronicos, roupas, comida)

Permutações

Possibilidades para a sequencia de tipos de produtos (eletronicos, roupas, comida)

- ERC, ECR, REC, RCE, CER, CRE: 3! possibilidades (princípio da multiplicação)

Permutações

Possibilidades para a sequencia de tipos de produtos (eletronicos, roupas, comida)

- ERC, ECR, REC, RCE, CER, CRE: 3! possibilidades (princípio da multiplicação)

Para cada uma destas possibilidades, devemos escolher a sequencia dos **eletronicos**, das **roupas**, e das comidas

- 4! poss. eletronicos, 7! poss. roupas, 3! poss. comidas (princípio da multiplicação)

Permutações

Possibilidades para a sequencia de tipos de produtos (eletronicos, roupas, comida)

- ERC, ECR, REC, RCE, CER, CRE: 3! possibilidades (princípio da multiplicação)

Para cada uma destas possibilidades, devemos escolher a sequencia dos **eletronicos**, das **roupas**, e das comidas

- 4! poss. eletronicos, 7! poss. roupas, 3! poss. comidas (princípio da multiplicação)

Total de possibilidades: 3!7!4!3! (de novo, princípio da multiplicacao)

Exercícios

Exercicio 3. Google recebeu uma busca por um produto, e deseja escolher os 3 primeiros resultados a serem mostrados. Google tem 10 possiveis resultados, sendo

- 3 da Empresa A,
- 2 da Empresa B, e
- 5 da Empresa C

Google quer mostrar 1 resultado de cada empresa. Quantas possibilidades são possíveis?

Exercicio 4. Escreva um algoritmos que gere todas as permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ onde 1 e 2 apareçam juntos (em qualquer ordem).

Quantas permutações seu algoritmo gera?