**Algoritmo Ford-Fulkerson** para fluxo $s$-$t$ máximo:

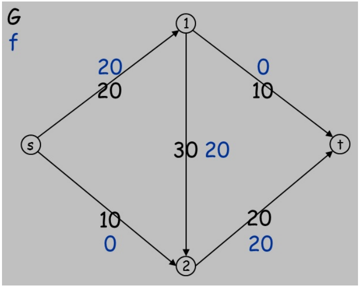
1) Comece com o fluxo $f$ vazio ($f(e) = 0$ para toda aresta $e$)

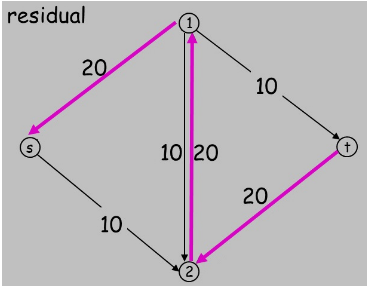
2) Monte a rede residual $G^f$

3) Encontre um caminho $s$-$t$ $P$ na rede residual, e "passe" $\min_{e \in P} c_{residual}(e)$ unidades de fluxo nesse caminho

Caso não exista tal caminho, pare

4) Repita do Passo 2



**Algoritmo Ford-Fulkerson** para fluxo $s$-$t$ máximo:

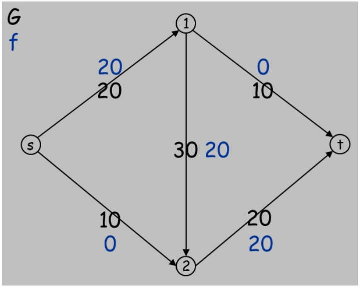
1) Comece com o fluxo $f$ vazio ($f(e) = 0$ para toda aresta $e$)

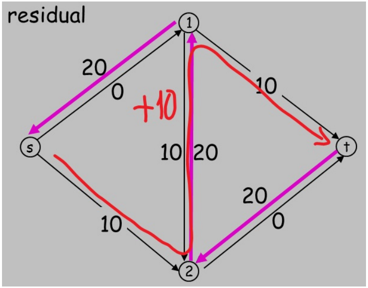
2) Monte a rede residual $G^f$

3) Encontre um caminho $s$-$t$ $P$ na rede residual, e “passe” $\min_{e \in P} c_{residual}(e)$ unidades de fluxo nesse caminho

Caso não exista tal caminho, pare

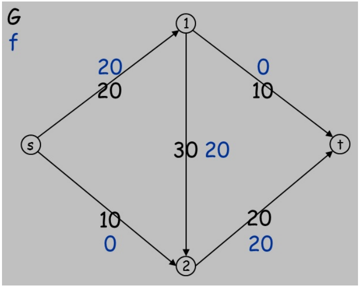
4) Repita do Passo 2

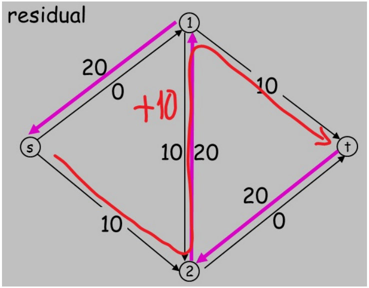


**Observação importante:** Se as capacidades forem inteiras existe fluxo máximo inteiro
(i.e., $f(e)$ é número inteiro para todas as arestas)

Segue do fato que, nesse caso, Ford-Fulkerson sempre muda o fluxo de uma aresta de uma quantidade inteira

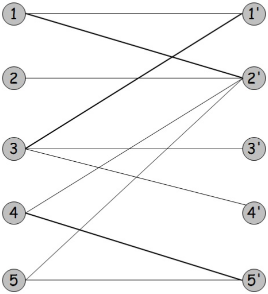


# Aplicação 1: Emparelhamento Máximo

# Aplicação 1: Emparelhamento Máximo

Como utilizar fluxo máximo para encontrar emparelhamento máximo em grafo bipartido?

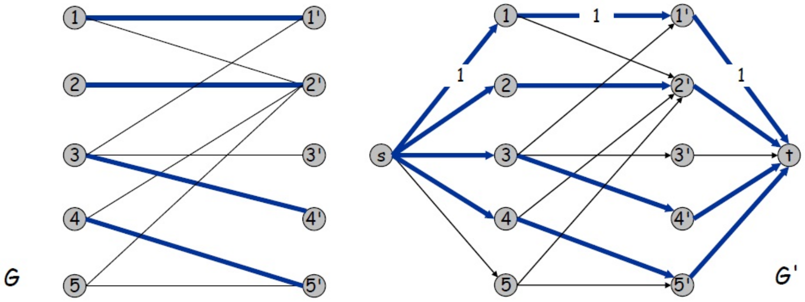


# Aplicação 1: Emparelhamento Máximo

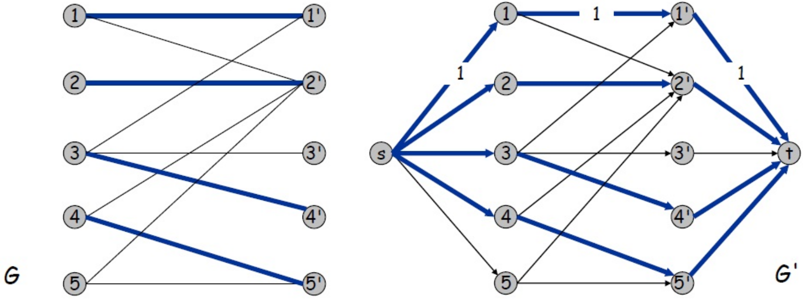
Resp: Crie o grafo direcionado $G'$ a partir de $G$ assim:

1) Direcione as arestas do grafo da esquerda pra direita
1) Adicione nós $s$, $t$
2) Conecte $s$ a todos os nós da esquerda, conecte todos os nós da direita a $t$
3) Coloque capacidade 1 em todas as aresta

# Aplicação 1: Emparelhamento Máximo



# Aplicação 1: Emparelhamento Máximo




Note que cada emparelhamento em $G$ corresponde a precisamente um fluxo em $G'$, e vice-versa

# Exercícios

**Exercício:**** Temos um conjunto de alunos, e um conjunto de ideias para Projeto Final

Cada aluno marcou algumas dessas ideias como "interessantes"

Até 3 alunos podem usar a mesma ideia para Projeto Final $(*)$

Mostre como podemos usar fluxo máximo para decidir se podemos atribuir os alunos às ideias de Projetos Finais tal que:

- Todos os alunos estão atribuídos a ideias que eles acham interessantes
- Satisfazemos à restrição $(*)$

# Exercícios

**Exercício:**** Temos um conjunto de alunos, e um conjunto de ideias para Projeto Final

Cada aluno marcou algumas dessas ideias como “interessantes”

Até 3 alunos podem usar a mesma ideia para Projeto Final $(*)$

Mostre como podemos usar fluxo máximo para decidir se podemos atribuir os alunos às ideias de Projetos Finais tal que:

- Todos os alunos estão atribuídos a ideias que eles acham interessantes
- Satisfazemos à restrição $(*)$

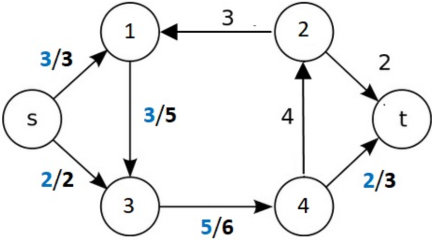
(Note que esse problema é uma generalização de emparelhamento onde podemos ter mais de uma aresta incidente em um nó, chamado $b$-mathcing)

# Exercícios

# Aplicação 2: Caminhos Disjuntos

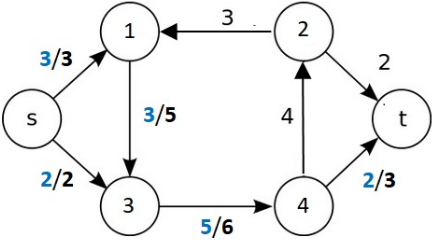
# Fluxos

**Observação preliminar:** Todo fluxo é uma união de "fluxos-caminho" e "fluxos-ciclo"



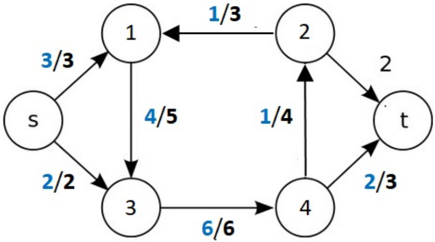
# Fluxos

**Observação preliminar:** Todo fluxo é uma união de "fluxos-caminho" e "fluxos-ciclo"



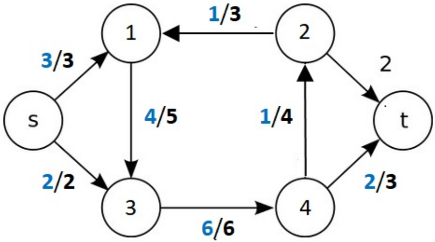
# Fluxos

**Observação preliminar:** Todo fluxo é uma união de "fluxos-caminho" e "fluxos-ciclo"



# Fluxos

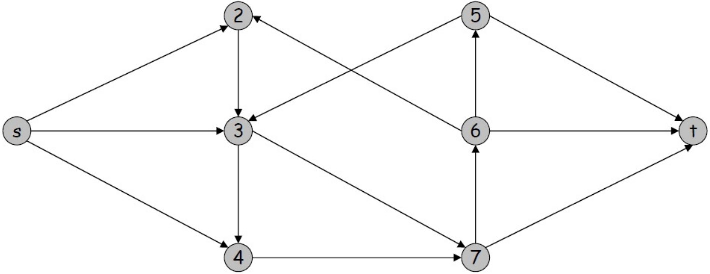
**Observação preliminar:** Todo fluxo é uma união de "fluxos-caminho" e "fluxos-ciclo"



# Caminhos Disjuntos

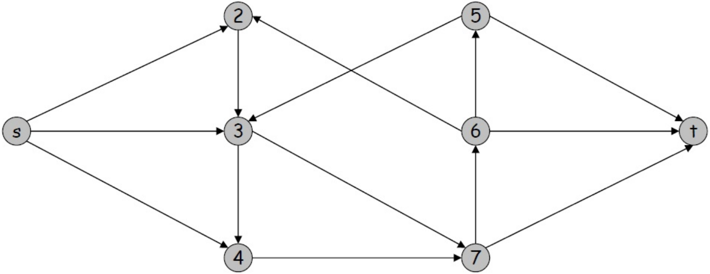
## Definição

*Dois caminhos em um grafo são **aresta-disjuntos** se eles não tem nenhuma aresta em comum*



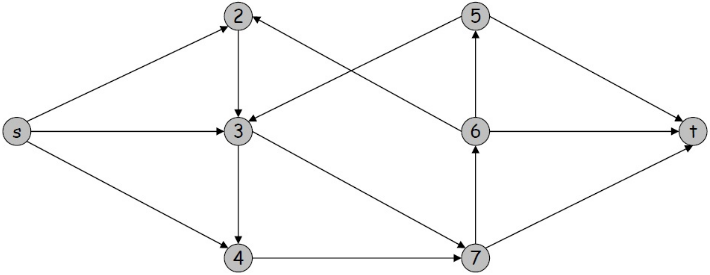
# Caminhos Disjuntos

**Problema:** Quantos caminhos $s$-$t$ aresta-disjuntos tem o grafo abaixo?



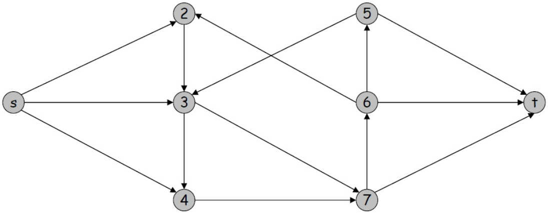
# Caminhos Disjuntos

**Problema:** Quantos caminhos $s$-$t$ aresta-disjuntos tem o grafo abaixo?

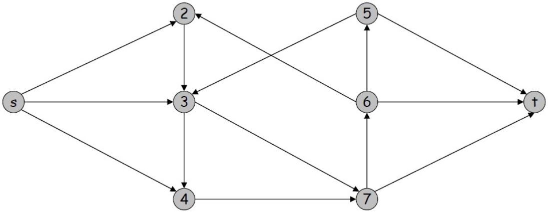



**Aplicações:** Redundância. Rede de telecomunicações, energia, etc.

**Pergunta:** Podemos utilizar fluxo máximo para encontrar quantos caminhos $s$-$t$ aresta-disjuntos existem?



**Pergunta:** Podemos utilizar fluxo máximo para encontrar quantos caminhos $s$-$t$ aresta-disjuntos existem?




Resp: Coloque capacidade 1 em cada aresta, encontre fluxo $s$-$t$ máximo (integral)

Decomponha o fluxo em “fluxo-caminhos”, cada um com fluxo 1, e “fluxo-ciclos” (ignore esses últimos)

Devido as capacidades, esses fluxos-caminhos usam caminhos aresta-disjuntos

# Aplicação 3: Eliminação em Competições

# Eliminação em Competições

| time | vitórias | derrotas | jogos faltando | contra | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i | $v_i$ | $d_i$ | $r_i$ | Atl | Phi | NY | Mon |
| Atlanta | 83 | 71 | 8 | - | 1 | 6 | 1 |
| Philly | 80 | 79 | 3 | 1 | - | 0 | 2 |
| New York | 78 | 78 | 6 | 6 | 0 | - | 0 |
| Montreal | 77 | 82 | 3 | 1 | 2 | 0 | - |

**Pergunta:** Philly ainda pode ganhar (ou empatar) o campeonato? (em número de vitórias)

# Eliminação em Competições

| time | vitórias | derrotas | jogos faltando | contra | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i | $v_i$ | $d_i$ | $r_i$ | Atl | Phi | NY | Mon |
| Atlanta | 83 | 71 | 8 | - | 1 | 6 | 1 |
| Philly | 80 | 79 | 3 | 1 | - | 0 | 2 |
| New York | 78 | 78 | 6 | 6 | 0 | - | 0 |
| Montreal | 77 | 82 | 3 | 1 | 2 | 0 | - |

**Pergunta:** Philly ainda pode ganhar (ou empatar) o campeonato? (em número de vitórias)

Resp: Não:

– Atlanta tem 6 jogos contra New York

# Eliminação em Competições

| time | vitórias | derrotas | jogos faltando | contra | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i | $v_i$ | $d_i$ | $r_i$ | Atl | Phi | NY | Mon |
| Atlanta | 83 | 71 | 8 | - | 1 | 6 | 1 |
| Philly | 80 | 79 | 3 | 1 | - | 0 | 2 |
| New York | 78 | 78 | 6 | 6 | 0 | - | 0 |
| Montreal | 77 | 82 | 3 | 1 | 2 | 0 | - |

**Pergunta:** Philly ainda pode ganhar (ou empatar) o campeonato? (em número de vitórias)

Resp: Não:
– Atlanta tem 6 jogos contra New York
– Caso Atlanta ganhe algum deles, é o campeão absoluto $\Rightarrow$ Philly não ganha

| time | vitórias | derrotas | jogos faltando | contra | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i | $v_i$ | $d_i$ | $r_i$ | Atl | Phi | NY | Mon |
| Atlanta | 83 | 71 | 8 | - | 1 | 6 | 1 |
| Philly | 80 | 79 | 3 | 1 | - | 0 | 2 |
| New York | 78 | 78 | 6 | 6 | 0 | - | 0 |
| Montreal | 77 | 82 | 3 | 1 | 2 | 0 | - |

**Pergunta:** Philly ainda pode ganhar (ou empatar) o campeonato? (em número de vitórias)

Resp: Não:
– Atlanta tem 6 jogos contra New York
– Caso Atlanta ganhe algum deles, é o campeão absoluto $\Rightarrow$ Philly não ganha
– Caso New York ganhe todos os 6 jogos, fica a frente de Philly (que só pode chegar a 83 vitórias) $\Rightarrow$ Philly não ganha

# Eliminação em Competições

**Pergunta:** Como usar fluxo máximo para saber se o time $i$ ainda pode ser campeão, no melhor caso?

# Eliminação em Competições

**Pergunta:** Como usar fluxo máximo para saber se o time $i$ ainda pode ser campeão, no melhor caso?

**Ideia:** No melhor caso, time $i$ ganha todos seus jogos restantes $\Rightarrow$ fica com $v_i + r_i$ vitórias

# Eliminação em Competições

**Pergunta:** Como usar fluxo máximo para saber se o time $i$ ainda pode ser campeão, no melhor caso?

**Ideia:** No melhor caso, time $i$ ganha todos seus jogos restantes $\Rightarrow$ fica com $v_i + r_i$ vitórias

Precisamos decidir se pode-se atribuir ganhadores para os jogos restantes de forma que nenhum time ganhe mais que $v_i + r_i$ no total

# Eliminação em Competições

**Pergunta:** Como usar fluxo máximo para saber se o time $i$ ainda pode ser campeão, no melhor caso?

**Ideia:** No melhor caso, time $i$ ganha todos seus jogos restantes $\Rightarrow$ fica com $v_i + r_i$ vitórias

Precisamos decidir se pode-se atribuir ganhadores para os jogos restantes de forma que nenhum time ganhe mais que $v_i + r_i$ no total

$\Rightarrow$ time $j$ deve ganhar no máximo $v_i + r_i - v_j$ jogos adicionais

# Eliminação em Competições

**Pergunta:** Como usar fluxo máximo para saber se o time $i$ ainda pode ser campeão, no melhor caso?

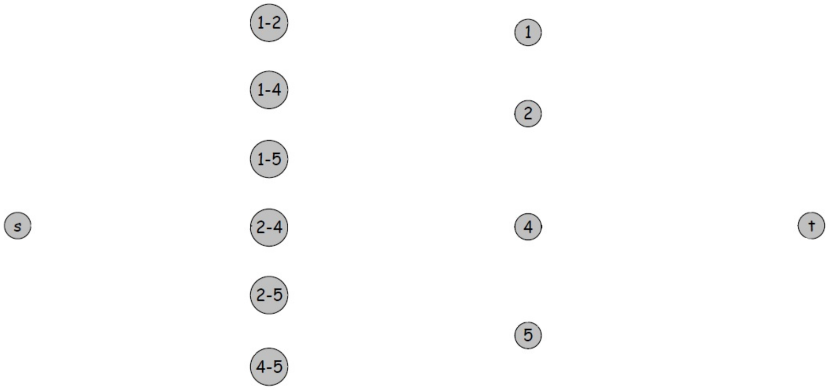
**Ideia:** No melhor caso, time $i$ ganha todos seus jogos restantes $\Rightarrow$ fica com $v_i + r_i$ vitórias

Precisamos decidir se pode-se atribuir ganhadores para os jogos restantes de forma que nenhum time ganhe mais que $v_i + r_i$ no total

$\Rightarrow$ time $j$ deve ganhar no máximo $v_i + r_i - v_j$ jogos adicionais

**Pergunta:** Como usar fluxo máximo para achar tal atribuição?

# Eliminação em Competições



# Exercícios

**Exercício 2:** Usando a formulação baseada em fluxo máximo, prove que Philly não pode ser um campeão

| time | vitórias | derrotas | jogos faltando | contra | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i | $v_i$ | $d_i$ | $r_i$ | Atl | Phi | NY | Mon |
| Atlanta | 83 | 71 | 8 | - | 1 | 6 | 1 |
| Philly | 80 | 79 | 3 | 1 | - | 0 | 2 |
| New York | 78 | 78 | 6 | 6 | 0 | - | 0 |
| Montreal | 77 | 82 | 3 | 1 | 2 | 0 | - |

## Exercício 3:

Suppose you are running a web site that is visited by the same set of people every day. Each visitor claims membership in one or more *demographic groups*; for example, a visitor might describe himself as male, 40–50 years old, a father, a resident of Illinois, an academic, a blogger, and a fan of Joss Whedon.[6] Your site is supported by advertisers. Each advertiser has told you which demographic groups should see its ads and how many of its ads you must show each day. Altogether, there are $n$ visitors, $k$ demographic groups, and $m$ advertisers.

Describe an efficient algorithm to determine, given all the data described in the previous paragraph, whether you can show each visitor exactly *one* ad per day, so that every advertiser has its desired number of ads displayed, and every ad is seen by someone in an appropriate demographic group.