Fluxo em Redes

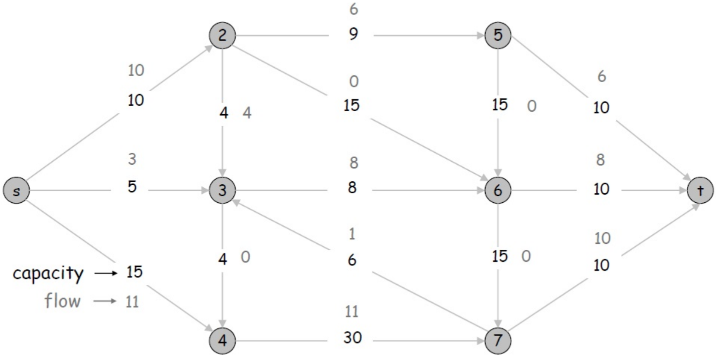
Definição (Fluxo)

Fluxo *s-t: fluxo $f(e)$ para cada aresta e satisfazendo*

– *Para cada aresta e:* $0 \le f(e) \le c(e)$ *(capacidade)*

– *Para cada nó $v \neq s, t$:* $\sum_{e \text{ entra } v} f(e) = \sum_{e \text{ sai } v} f(e)$ *(conservação)*

Valor do fluxo: $\sum_{e \text{ sai } s} f(e)$ *(fluxo saindo de s)*

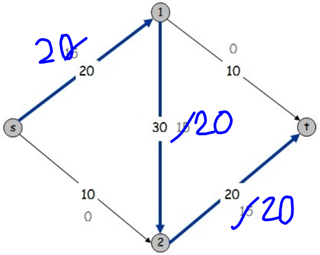


Fluxos

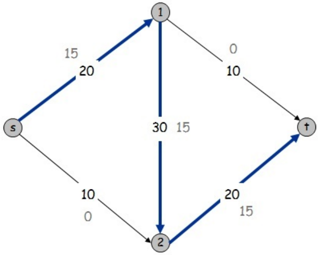
Ultima aula vimos propriedades estruturais de fluxos: fluxos máximo e cortes

Pergunta: Como encontrar um fluxo s-t máximo?

Perguntа: Podemos aumentar o fluxo abaixo?

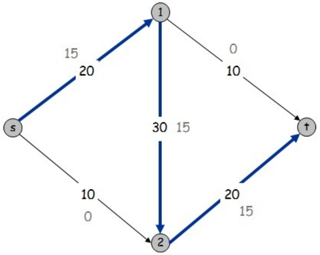


Pergunta: Podemos aumentar o fluxo abaixo?

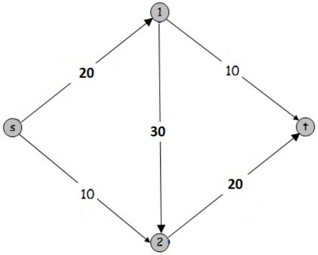


Pergunta: Esse é o fluxo máximo?

Pergunta: Podemos aumentar o fluxo abaixo?



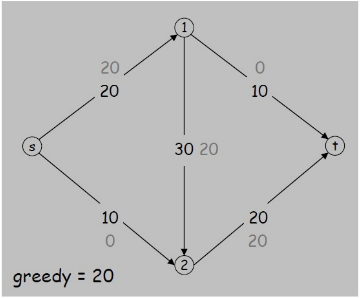
Pergunta: Esse é o fluxo máximo? Resp: Não, tem fluxo de valor 30



Só ficar tentado aumentar o fluxo nas arestas pode ficar empacado. . .

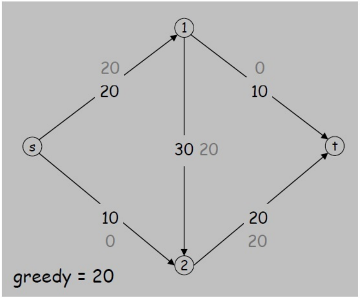
Só ficar tentado aumentar o fluxo nas arestas pode ficar empacado...

As vezes tem que **reduzir fluxo** em umas arestas para conseguir prosseguir:



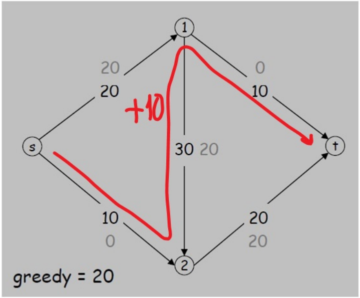
Só ficar tentado aumentar o fluxo nas arestas pode ficar empacado. . .

As vezes tem que **reduzir fluxo** em umas arestas para conseguir prosseguir:



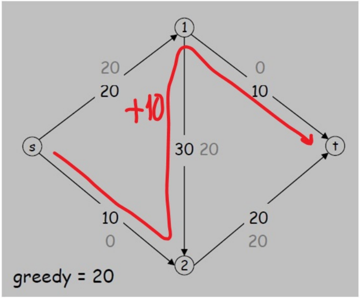
Só ficar tentado aumentar o fluxo nas arestas pode ficar empacado...

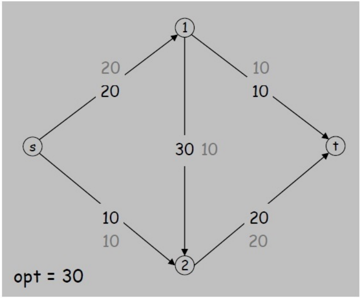
As vezes tem que **reduzir fluxo** em umas arestas para conseguir prosseguir:



Só ficar tentado aumentar o fluxo nas arestas pode ficar empacado...

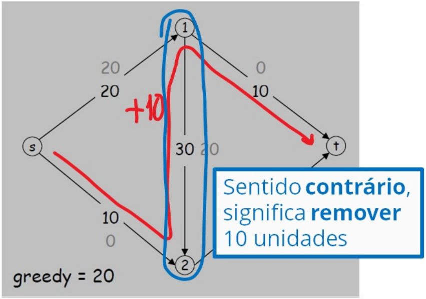
As vezes tem que **reduzir fluxo** em umas arestas para conseguir prosseguir:

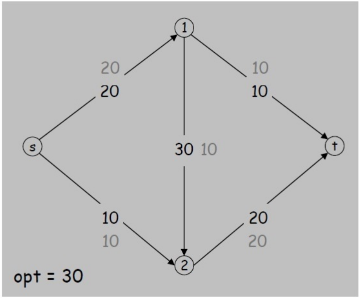




Só ficar tentado aumentar o fluxo nas arestas pode ficar empacado. . .

As vezes tem que **reduzir fluxo** em umas arestas para conseguir prosseguir:





Pergunta: Como saber quais arestas devemos reduzir fluxo?

Pergunta: Como saber quais arestas devemos reduzir fluxo?

Resp: Vamos construir rede residual que tem arestas no sentido contrário que nos deixa "despassar" fluxo...

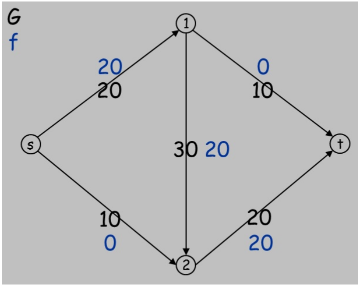
Pergunta: Como saber quais arestas devemos reduzir fluxo?

Resp: Vamos construir rede residual que tem arestas no sentido contrário que nos deixa “despassar” fluxo…

…algoritmo vai utilizar essa rede residual

Rede residual

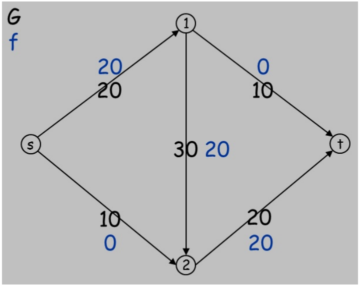
– Dado um grafo G direcionado com capacidades **e um fluxo** f

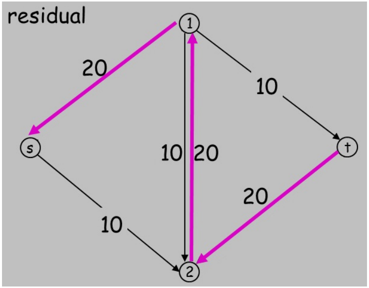


Rede residual

– Dado um grafo G direcionado com capacidades **e um fluxo** f

– A rede residual G^f tem os mesmos nós de G, e:



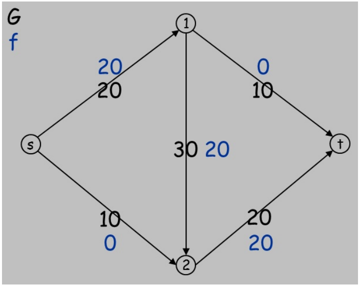


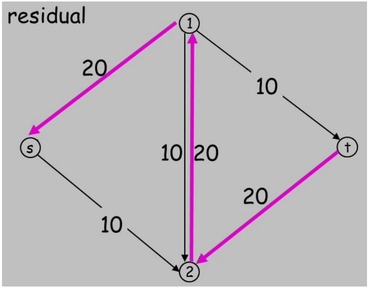
Rede residual

– Dado um grafo G direcionado com capacidades **e um fluxo** f

– A rede residual G^f tem os mesmos nós de G, e:

a) Se aresta original e tem capacidade restante, adicionamos-a na rede residual com capacidade restante $c(e) - f(e)$





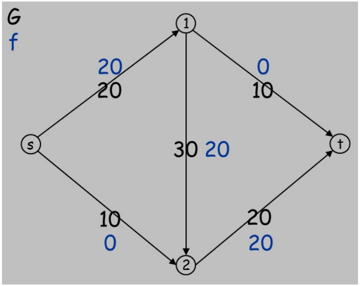
Rede residual

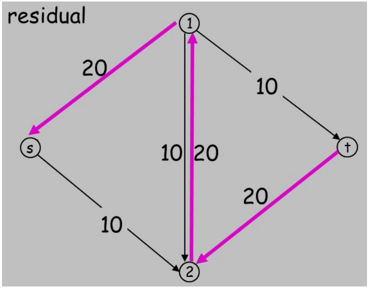
– Dado um grafo G direcionado com capacidades **e um fluxo** f

– A rede residual G^f tem os mesmos nós de G, e:

a) Se aresta original e tem capacidade restante, adicionamos-a na rede residual com capacidade restante $c(e) - f(e)$

b) Se tem fluxo passando pela aresta (u, v) adicionamos na rede residual a **aresta reversa** (v, u) com **capacidade** $f(u, v)$





Rede residual

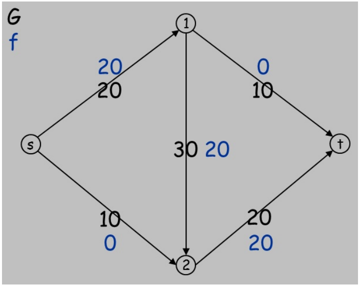
– Dado um grafo G direcionado com capacidades **e um fluxo** f

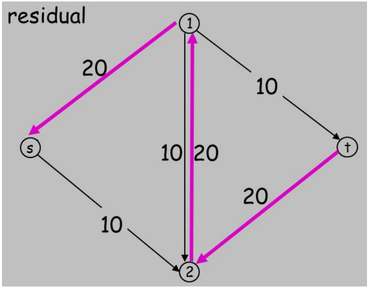
– A rede residual G^f tem os mesmos nós de G, e:

a) Se aresta original e tem capacidade restante, adicionamos-a na rede residual com capacidade restante $c(e) - f(e)$

b) Se tem fluxo passando pela aresta (u, v) adicionamos na rede residual a **aresta reversa** (v, u) com **capacidade** $f(u, v)$

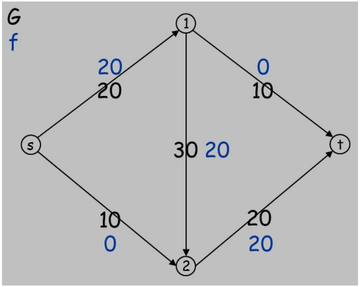
$\Rightarrow$ podemos **"despassar"** até $f(u, v)$ unidades nesse aresta

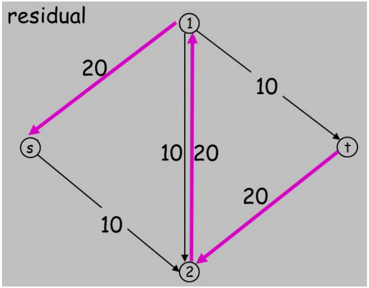




(Para simplificar, pode pensar que em G para cada par de nós u, v não temos arestas em ambas as direções, i.e., arestas (u, v) e (v, u))

Observações:

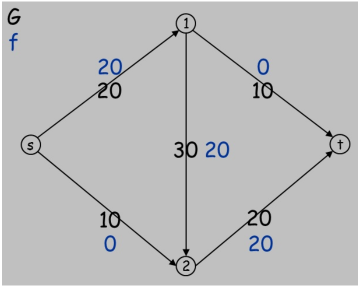


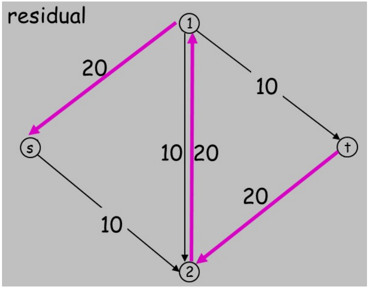


(Para simplificar, pode pensar que em G para cada par de nós u, v não temos arestas em ambas as direções, i.e., arestas (u, v) e (v, u))

Observações:

1) Note que a rede residual depende do fluxo atual; se atualizarmos o fluxo, temos que atualizar a rede residual



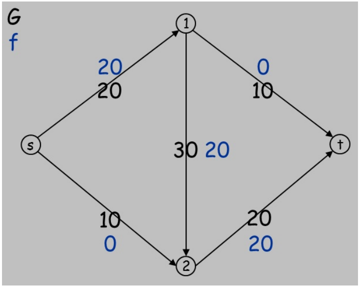


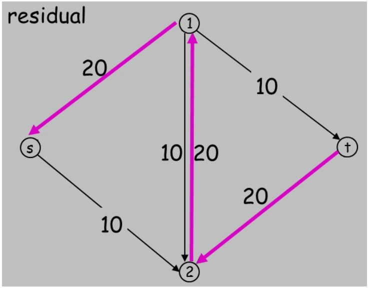
(Para simplificar, pode pensar que em G para cada par de nós u, v não temos arestas em ambas as direções, i.e., arestas (u, v) e (v, u))

Observações:

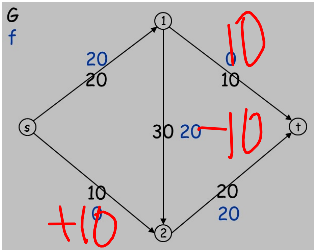
1) Note que a rede residual depende do fluxo atual; se atualizarmos o fluxo, temos que atualizar a rede residual

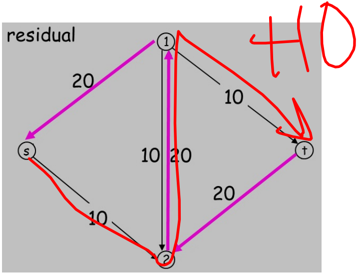
2) Rede residual modela simultaneamente o quanto podemos aumentar de fluxo nas aresta, e quanto podemos reduzir



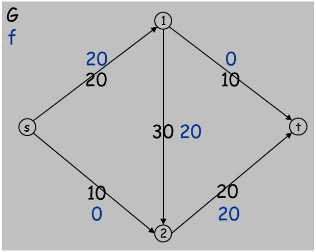


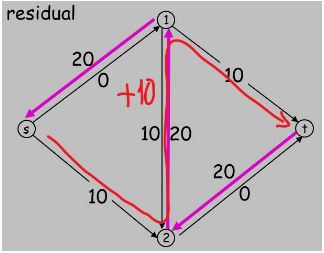
Pergunta: O que significa “passar mais 10 unidades” no caminho vermelho da rede residual?





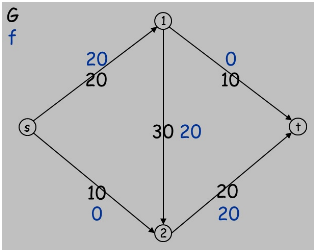
Pergunta: O que significa "passar mais 10 unidades" no caminho vermelho da rede residual?

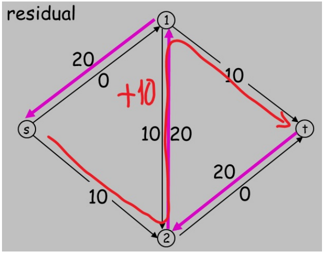


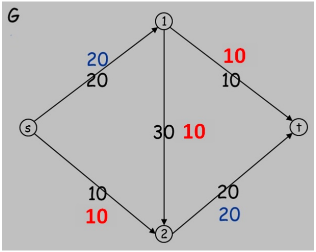


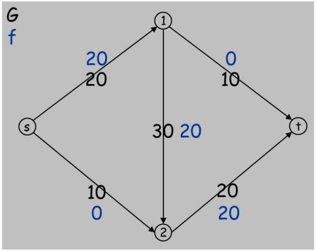
Pergunta: O que significa "passar mais 10 unidades" no caminho vermelho da rede residual?

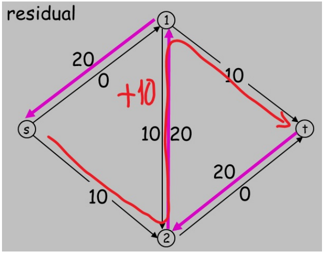
Resp: Olhe para o grafo **original**, e aumente +10 em cada aresta "preta" e -10 em cada aresta correspondente a "magenta"

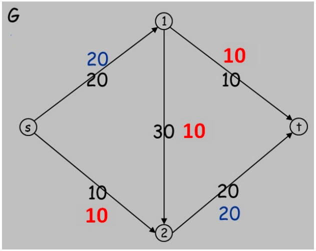




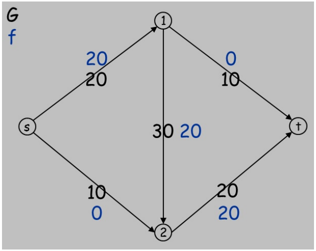


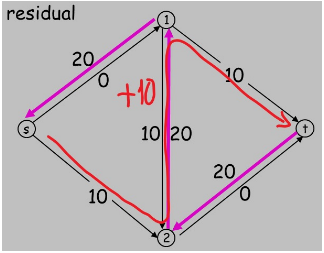


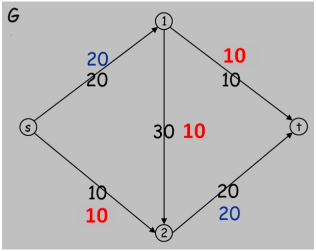




Pergunta: Com isso, o valor do fluxo (quantidade total indo de s a t) aumentou ou diminuiu?



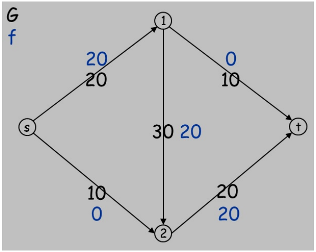


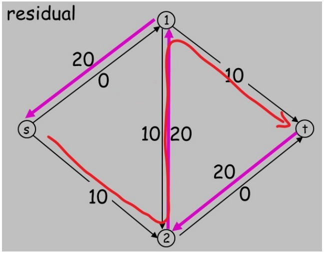


Pergunta: Com isso, o valor do fluxo (quantidade total indo de s a t) aumentou ou diminuiu?

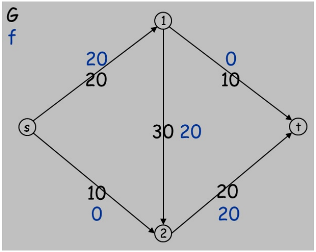
Resp: Aumentou em **+10**!

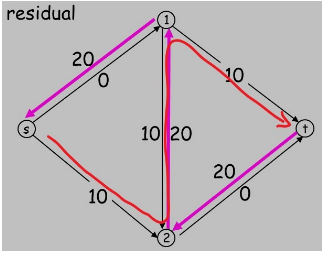
Pergunta: Quantas unidades podemos “passar” no caminho vermelho?





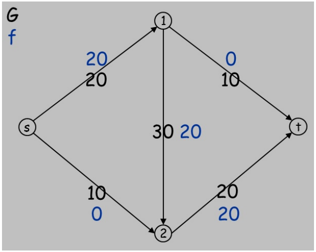
Perguntas: Quantas unidades podemos “passar” no caminho vermelho?

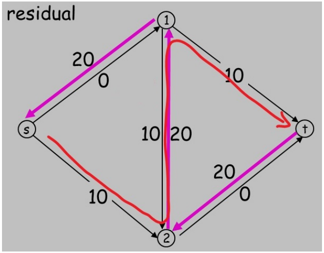




Pergunta: Quantas unidades podemos "passar" no caminho vermelho?

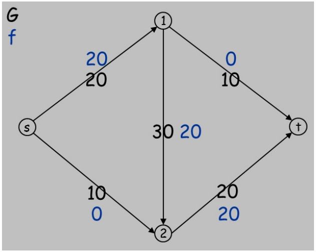
Resp: Mo máximo a menor capacidade residual no caminho, **10**

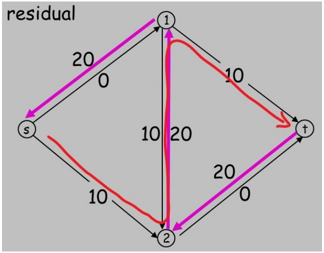




Pergunta: Quantas unidades podemos “passar” no caminho vermelho?

Resp: Mo máximo a menor capacidade residual no caminho, **10**





Isso garante que não violaremos capacidades originais $c(e)$ e não reduzimos mais fluxo em uma aresta do que existe

Com essa habilidade de remover fluxo, não ficamos empacados, encontramos o fluxo máximo com o seguinte algoritmo:

Com essa habilidade de remover fluxo, não ficamos empacados, encontramos o fluxo máximo com o seguinte algoritmo:

Algoritmo Ford-Fulkerson para fluxo s-t máximo:

1) Comece com o fluxo f vazio ($f(e) = 0$ para toda aresta e)

2) Monte a rede residual G^f

3) Encontre um caminho s-t P na rede residual, e "passe" $\min_{e \in P} c_{residual}(e)$ unidades de fluxo nesse caminho

Caso não exista tal caminho, pare

4) Repita do Passo 2

Com essa habilidade de remover fluxo, não ficamos empacados, encontramos o fluxo máximo com o seguinte algoritmo:

Algoritmo Ford-Fulkerson para fluxo s-t máximo:

1) Comece com o fluxo f vazio ($f(e) = 0$ para toda aresta e)

2) Monte a rede residual G^f

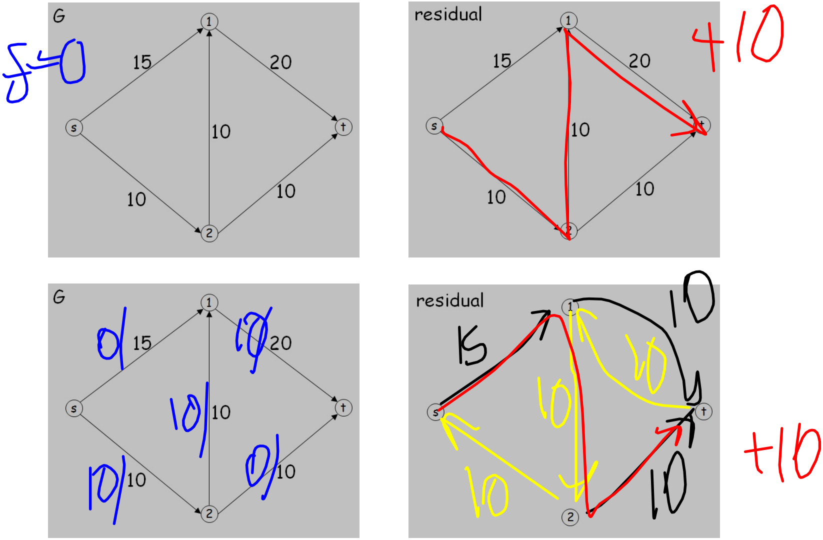
3) Encontre um caminho s-t P na rede residual, e "passe" $\min_{e \in P} c_{residual}(e)$ unidades de fluxo nesse caminho

Caso não exista tal caminho, pare

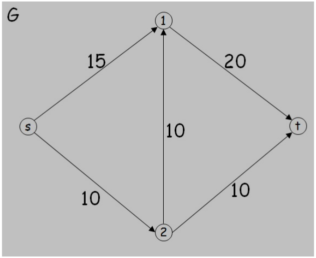
4) Repita do Passo 2

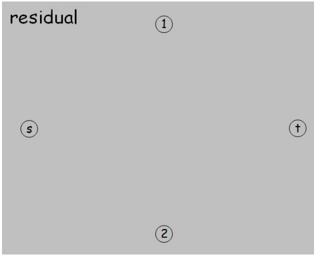
Obs: No Passo 3 podemos usar qualquer caminho s-t. Escolhas bem feitas levam a algoritmos mais eficientes

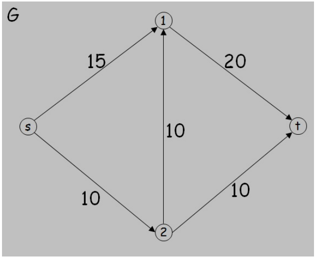
Exemplo: [Use caminho mais longo]

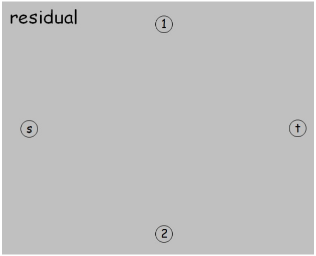


Exemplo: [Use caminho mais longo]



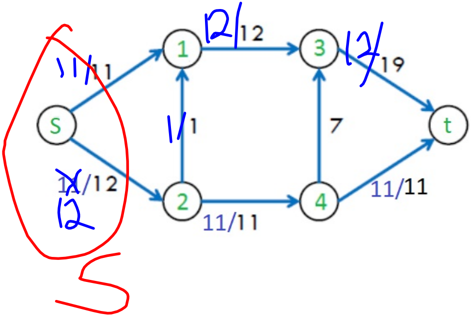






Exercícios

Exercício 1: Dado o grafo e fluxo abaixo (em azul), encontre a rede residual



Exercício 2: Utilizando o fluxo acima como ponto de partida, encontre o fluxo máximo no grafo acima usando Ford-Fulkerson

Modelando com Fluxo Máximo

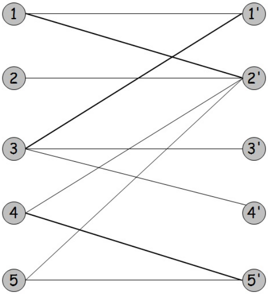
Modelando

Observação importante: Se as capacidades forem inteiras existe fluxo máximo inteiro
(i.e., $f(e)$ é número inteiro para todas as arestas)

Segue do fato que, nesse caso, Ford-Fulkerson sempre muda o fluxo de uma aresta de uma quantidade inteira

Aplicação 1: Emparelhamento Máximo

Como utilizar fluxo máximo para encontrar emparelhamento máximo em grafo bipartido?



Aplicação 1: Emparelhamento Máximo

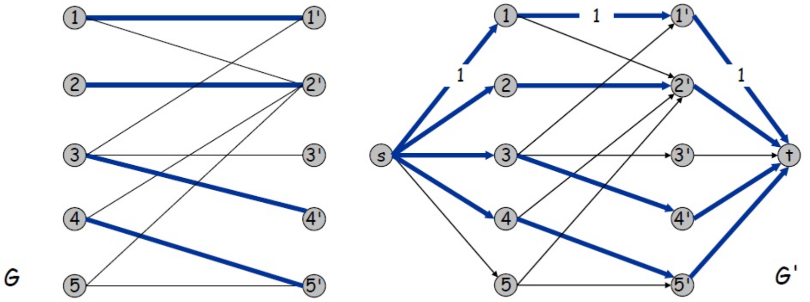
Resp: Crie o grafo direcionado G' a partir de G assim:

1) Direcione as arestas do grafo da esquerda pra direita
1) Adicione nós s, t
2) Conecte s a todos os nós da esquerda, conecte todos os nós da direita a t
3) Coloque capacidade 1 em todas as aresta

Aplicação 1: Emparelhamento Máximo

Lema

Existe uma bijeção (correspondência 1-para-1) entre emparelhamentos máximos em G e fluxos máximo inteiros em G'



Exercícios

Exercício 3: Dado um grafo não-direcionado, um *3-emparelhamento* é um conjunto de aresta E' onde cada nó é ponta de no máximo 3 arestas em E'

Mostre como utilizar fluxo máximo para encontrar o maior 3-emparelhamento em um grafo bipartido