

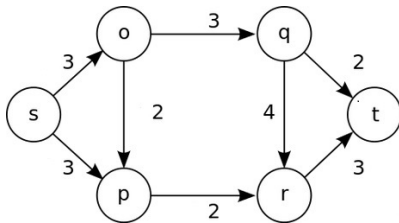
Fluxo em Redes

Definição (Fluxo)

É dado um grafo direcionado, onde cada aresta e tem *capacidade* $c(e)$.

Dados nós s, t , um **fluxo** s - t é uma atribuição de valor (fluxo) $f(e)$ para cada aresta e satisfazendo:

- Para cada aresta e : $0 \leq f(e) \leq c(e)$ (*capacidade*)
- Para cada nó $v \neq s, t$: $\sum_{e \text{ entra } v} f(e) = \sum_{e \text{ sai } v} f(e)$ (*conservação*)

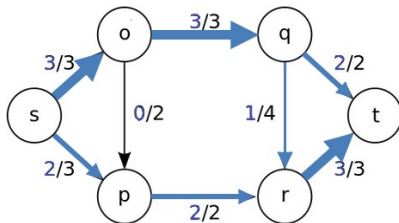


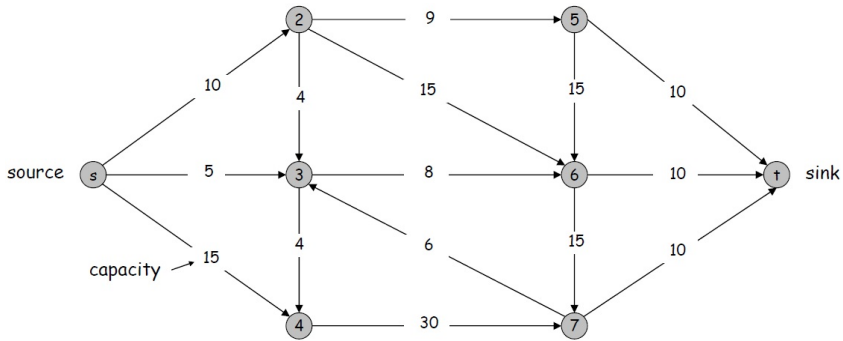
Definição (Fluxo)

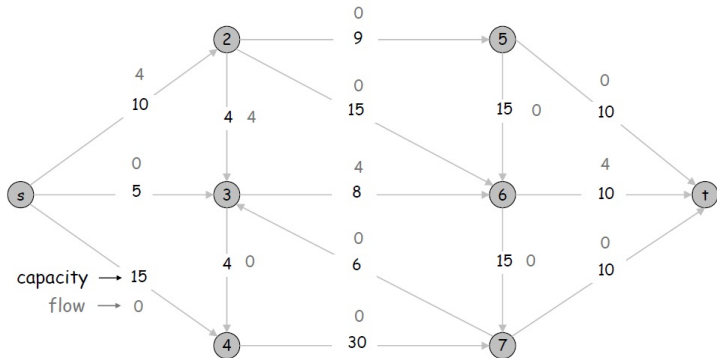
É dado um grafo direcionado, onde cada aresta e tem *capacidade* $c(e)$.

Dados nós s, t , um **fluxo** s - t é uma atribuição de valor (fluxo) $f(e)$ para cada aresta e e satisfazendo:

- Para cada aresta e : $0 \leq f(e) \leq c(e)$ (*capacidade*)
- Para cada nó $v \neq s, t$: $\sum_{e \text{ entra } v} f(e) = \sum_{e \text{ sai } v} f(e)$ (*conservação*)







Muitas aplicações

Survey Design

Airline Scheduling

Image Segmentation

Project Selection

Sport Elimination

Matching

...

(Caminho mais curto, etc.)

(Livro “Network Flows”, Ajuha, Magnanti, Orlin)

Fluxos

Perspectiva *mais natural* de fluxos:

Lema (Decomposição de fluxo, *informal*)

Todo fluxo é uma união de “fluxos-caminho” e “fluxos-ciclo”

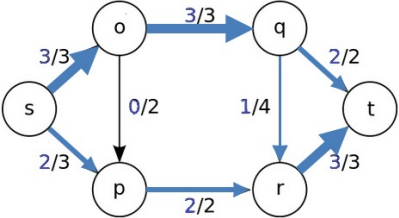
Fluxos

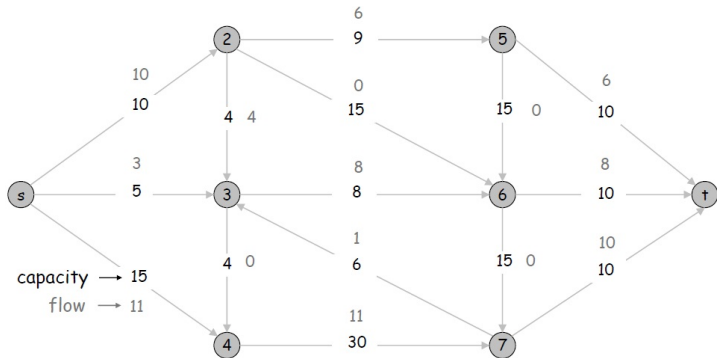
Perspectiva **mais natural** de fluxos:

Lema (Decomposição de fluxo, **informal**)

Todo fluxo é uma união de “fluxos-caminho” e “fluxos-ciclo”

Ideia de prova: “Descasque” fluxos-caminho sucessivamente





Fluxos

Fluxo máximo: Dadas as capacidades, qual é o maior fluxo que podemos passar de s a t ?

Fluxos

Fluxo máximo: Dadas as capacidades, qual é o maior fluxo que podemos passar de s a t ?

Assumimos que s não tem aresta entrando, pra simplificar

Fluxos

Fluxo máximo: Dadas as capacidades, qual é o maior fluxo que podemos passar de s a t ?

Assumimos que s não tem aresta entrando, pra simplificar

Definição (Valor do fluxo)

O valor do fluxo f é o fluxo saindo de s :

$$val(f) = \sum_{e \text{ sai } s} f(e)$$

Fluxos

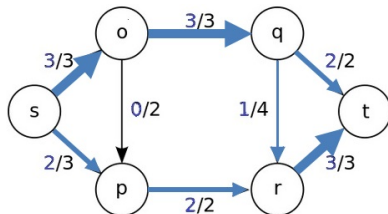
Fluxo máximo: Dadas as capacidades, qual é o maior fluxo que podemos passar de s a t ?

Assumimos que s não tem aresta entrando, pra simplificar

Definição (Valor do fluxo)

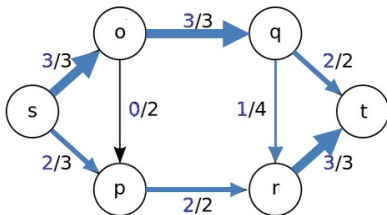
O valor do fluxo f é o fluxo saindo de s :

$$\text{val}(f) = \sum_{e \text{ sai } s} f(e)$$



Fluxo

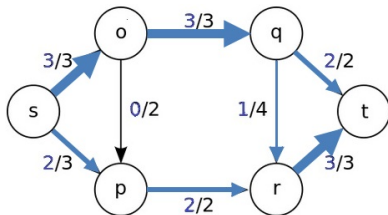
Pergunta: Se saem $val(f)$ unidades de fluxo de s , quanto chega a t ?



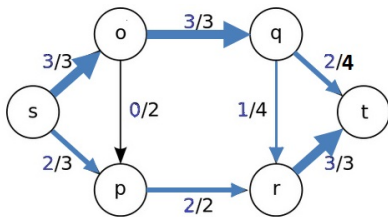
Fluxo

Pergunta: Se saem $val(f)$ unidades de fluxo de s , quanto chega a t ?

Resp: Chegam $val(f)$, devido a **conservação de fluxo**

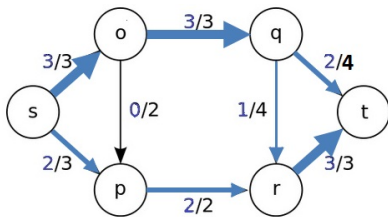


Pergunta: Qual é o valor do fluxo máximo nesse grafo? **Porque?**



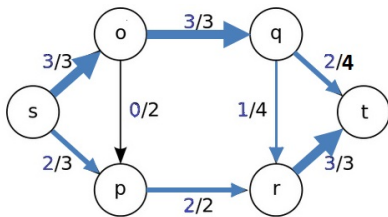
Pergunta: Qual é o valor do fluxo máximo nesse grafo? **Porque?**

Resp: 5, pois as arestas horizontais não deixam passar mais do que isso de s a t



Pergunta: Qual é o valor do fluxo máximo nesse grafo? **Porque?**

Resp: 5, pois as arestas horizontais não deixam passar mais do que isso de s a t



Vamos generalizar esse argumento com a noção de **corte**

Definição (Corte)

Um **corte** s - t é um conjunto de nós S que *contém* s e *não contém* t

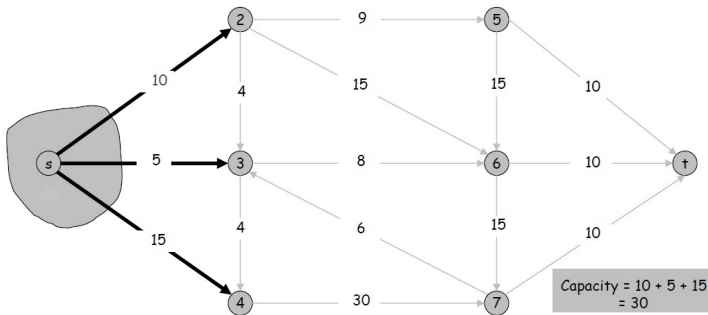
A **capacidade do corte** S é a soma das *capacidades* das arestas que *vão de* S *para fora de* S :

$$\text{cap}(S) = \sum_{(u,v):u \in S, v \notin S} c(u, v)$$

Definição (Corte)

Um **corte** s - t é um conjunto de nós S que *contém* s e *não contém* t .
A **capacidade do corte** S é a soma das *capacidades* das arestas que *vão de* S *para fora de* S :

$$\text{cap}(S) = \sum_{(u,v): u \in S, v \notin S} c(u,v)$$

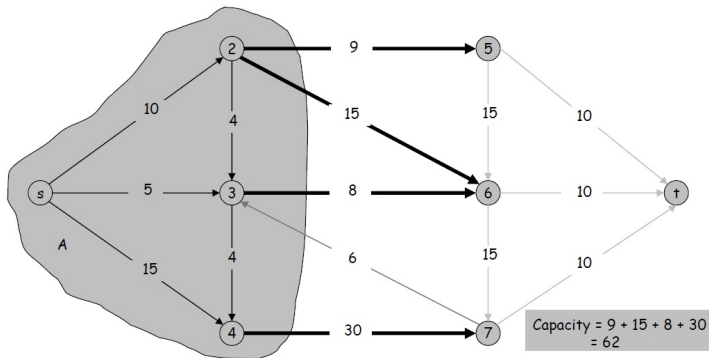


Definição (Corte)

Um **corte** s - t é um conjunto de nós S que *contém* s e *não contém* t

A **capacidade do corte** S é a soma das *capacidades* das arestas que vão *de* S *para fora de* S :

$$\text{cap}(S) = \sum_{(u,v): u \in S, v \notin S} c(u,v)$$



Pergunta: Qual a relação entre **valor de fluxos** e **cortes**?

Pergunta: Qual a relação entre valor de fluxos e cortes?

Resp: Valor que qualquer fluxo é limitado pela capacidade dos cortes

Lema

Considere um grafo direcionado com capacidades. Para todo fluxo $s-t$ e todo corte $s-t$ S

$$val(f) \leq cap(S)$$

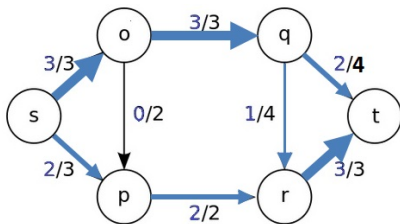
Pergunta: Qual a relação entre **valor de fluxos** e **cortes**?

Resp: Valor que qualquer fluxo é **limitado pela capacidade dos cortes**

Lema

Considere um grafo direcionado com capacidades. Para todo fluxo $s-t$ e todo corte $s-t$ S

$$val(f) \leq cap(S)$$



Prova: Devido a **conservação de fluxo** todos os nós $\neq s$ tem “fluxo de entrada = fluxo de saída”, então

$$\sum_{v \in S} \left(\sum_{e \text{ sai } v} f(e) - \sum_{e \text{ entra } v} f(e) \right) = \sum_{e \text{ sai } s} f(e) = \text{val}(f)$$

Prova: Devido a **conservação de fluxo** todos os nós $\neq s$ tem “fluxo de entrada = fluxo de saída”, então

$$\sum_{v \in S} \left(\sum_{e \text{ sai } v} f(e) - \sum_{e \text{ entra } v} f(e) \right) = \sum_{e \text{ sai } s} f(e) = \text{val}(f)$$

Mas

$$\sum_{v \in S} \left(\sum_{e \text{ sai } v} f(e) - \sum_{e \text{ entra } v} f(e) \right) = \sum_{e \text{ saindo de } S} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } S} f(e) :$$

- Aresta e com as **duas pontas em S** contribui 0: + e - cancelam
- Aresta e com as **duas pontas fora de S** contribui 0
- Aresta e **saindo de S** contribui $+f(e)$
- Aresta e **entrando em S** contribui $-f(e)$

Colocando essas observações juntas temos

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &= \sum_{v \in S} \left(\sum_{e \text{ sai } v} f(e) - \sum_{e \text{ entra } v} f(e) \right) \\ &= \sum_{e \text{ saindo de } S} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } S} f(e) \\ &\leq \sum_{e \text{ saindo de } S} f(e) \\ &= \text{cap}(S) \end{aligned}$$



Fluxo

Em particular, o lema anterior funciona para o **fluxo máximo** e **corte com menor capacidade**

Corolário

O fluxo máximo tem valor \leq à capacidade do corte de menor capacidade

Fluxo

Em particular, o lema anterior funciona para o **fluxo máximo** e **corte com menor capacidade**

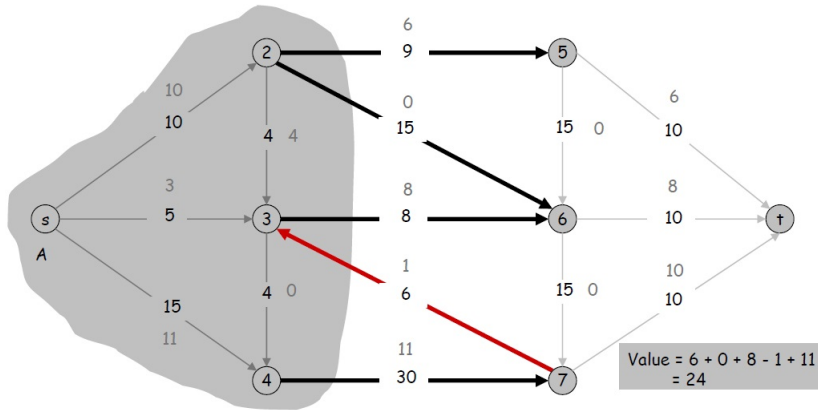
Corolário

O fluxo máximo tem valor \leq à capacidade do corte de menor capacidade

Na verdade, essa relação é de **igualdade**

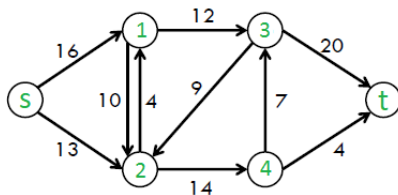
Teorema (Max-flow/min-cut)

O fluxo máximo tem valor $=$ à capacidade do corte de menor capacidade



Exercícios

Exercício 1: Encontre o fluxo máximo no grafo abaixo



Exercício 2: Encontre um corte que prova que o fluxo encontrado acima é máximo