

Coloração de Vértices

Coloração

Temos que armazenar 5 compostos químicos, A, B, C, D e E em recipientes

Coloração

Temos que armazenar 5 compostos químicos, A, B, C, D e E em recipientes

Para evitar contaminação os seguinte pares não podem ser armazenados no mesmo recipiente: A-B, A-C, D-E, C-D

Coloração

Temos que armazenar 5 compostos químicos, A, B, C, D e E em recipientes

Para evitar contaminação os seguinte pares não podem ser armazenados no mesmo recipiente: A-B, A-C, D-E, C-D

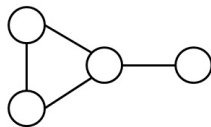
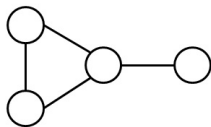
Neste caso, qual o **número mínimo de recipientes** que precisamos?

Coloração

Novamente, hoje grafos são **não-direcionados**

Definição (Coloração)

Uma **coloração dos vértices** de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices onde **vértices adjacentes recebem cores diferentes**

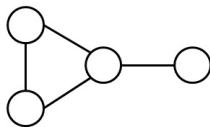
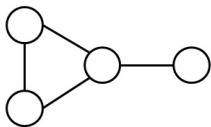


Coloração

Novamente, hoje grafos são **não-direcionados**

Definição (Coloração)

Uma **coloração dos vértices** de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices onde **vértices adjacentes recebem cores diferentes**



Definição (Número cromático)

O **número cromático** de um grafo G , denotado $\chi(G)$, é o **menor número de cores** possíveis para uma coloração

Coloração

Aplicações: Arestas representam [conflitos](#)

Ex: (Atribuição de salas) Dada a grade de disciplinas da PUC para o próximo período (disciplinas com horários já definidos), quantas salas de aulas são necessárias?

Coloração

Aplicações: Arestas representam [conflitos](#)

Ex: (Atribuição de salas) Dada a grade de disciplinas da PUC para o próximo período (disciplinas com horários já definidos), quantas salas de aulas são necessárias?

- Alocação de transporte
- Alocação de registradores por um compilador
- Sudoku
- ...

(Livro “A Guide to Graph Coloring”, Lewis)

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Resp: 2

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Resp: 2

Pergunta: Qual é o número cromático de um grafo bipartido?

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Resp: 2

Pergunta: Qual é o número cromático de um grafo bipartido?

Resp: 2

Coloração

Número cromático $\chi(G) = k \equiv G$ é k -partido:

Nós podem ser agrupados em $\chi(G)$ grupos (cores) e não temos arestas dentro de um grupo

Coloração

Cotas superiores: Certamente $\chi(G) \leq \# \text{ nós}$

Coloração

Cotas superiores: Certamente $\chi(G) \leq \# \text{ nós}$

Mas intuitivamente, se o grafo tem **poucas arestas** o número cromático deve ser pequeno

Coloração

Cotas superiores: Certamente $\chi(G) \leq \# \text{ nós}$

Mas intuitivamente, se o grafo tem **poucas arestas** o número cromático deve ser pequeno

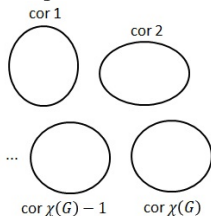
Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

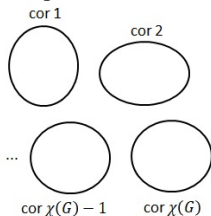
Prova: Considere uma coloração de G com $\chi(G)$ cores



Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

Prova: Considere uma coloração de G com $\chi(G)$ cores

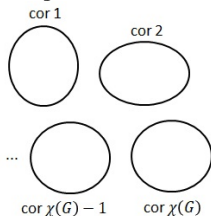


Pra cada par de cores diferentes, tem pelo menos uma aresta conectando essas cores, senão dava para reduzir o número de cores

Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

Prova: Considere uma coloração de G com $\chi(G)$ cores



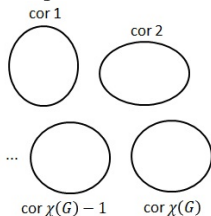
Pra cada par de cores diferentes, tem pelo menos uma aresta conectando essas cores, senão dava para reduzir o número de cores

$$\text{Então } \#arestas \geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2} \approx \frac{\chi(G)^2}{2}$$

Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

Prova: Considere uma coloração de G com $\chi(G)$ cores



Pra cada par de cores diferentes, tem pelo menos uma aresta conectando essas cores, senão dava para reduzir o número de cores

$$\text{Então } \#arestas \geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2} \approx \frac{\chi(G)^2}{2}$$

$$\text{Ou seja, } \#arestas \gtrsim \frac{\chi(G)^2}{2} \Rightarrow \chi(G) \lesssim \sqrt{2 \cdot \#arestas}$$



Coloração

Além disso, se os graus dos nós de G são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

Coloração

Além disso, se os graus dos nós de G são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $k + 1$ cores

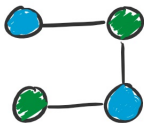
Coloração

Além disso, se os graus dos nós de G são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $k + 1$ cores (alguma cor pode ser usada 0 vezes).

$k=2$



$k+1$ cores: azul, verde, vermelho

usada
0 vezes

Coloração

Além disso, se os graus dos nós de G são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $k + 1$ cores (alguma cor pode ser usada 0 vezes).

Prova: Por indução no número de vértices

Coloração

Além disso, se os graus dos nós de G são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $k + 1$ cores (alguma cor pode ser usada 0 vezes).

Prova: Por indução no número de vértices

Caso base: 0 vértices, ok

Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $\leq k + 1$ cores (alguma cor pode ser usada 0 vezes).

Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para para todo grafo com n nós.

Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $\leq k + 1$ cores (alguma cor pode ser usada 0 vezes).

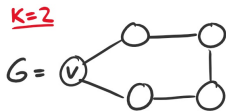
Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para para todo grafo com n nós. Provamos para $n + 1$

Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $\leq k + 1$ cores (alguma cor pode ser usada 0 vezes).

Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para para todo grafo com n nós. Provamos para $n + 1$

Considere grafo G com $n + 1$ nós ...

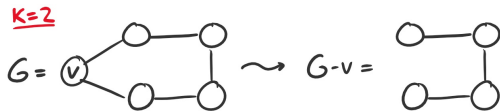


Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $\leq k + 1$ cores (alguma cor pode ser usada 0 vezes).

Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para para todo grafo com n nós. Provamos para $n + 1$

Considere grafo G com $n + 1$ nós ... remova nó qualquer v

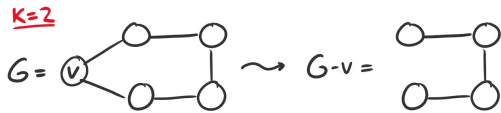


Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $\leq k + 1$ cores (alguma cor pode ser usada 0 vezes).

Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para todo grafo com n nós. Provamos para $n + 1$

Considere grafo G com $n + 1$ nós ... remova nó qualquer v



Usando a hipótese indutiva, colora $G - v$ com $k + 1$ cores

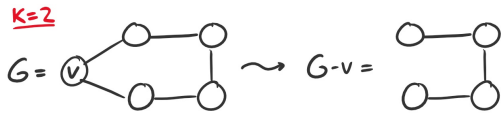


Proposição

Se todos os nós de G tem grau $\leq k$, então conseguimos colorir seus nós com $\leq k + 1$ cores (alguma cor pode ser usada 0 vezes).

Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para todo grafo com n nós. Provamos para $n + 1$

Considere grafo G com $n + 1$ nós ... remova nó qualquer v



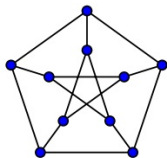
Usando a **hipótese indutiva**, colora $G - v$ com $k + 1$ cores



Como v tem no máximo k vizinhos, uma cor não aparece nenhum vizinho \Rightarrow use essa cor em v

Exercícios

Exercício 1: Encontre o número cromático do grafo abaixo



Exercício 2: O que acontece com o número cromático quando adicionamos uma aresta? E quando removemos uma aresta?

Exercício 3: Considere um grafo G com 2 componentes conexos. Relacione o número cromático de G com o de seus componentes conexos

Exercícios

Exercício 4: Dê um algoritmo que faça o seguinte: Dado um grafo onde todos os nós tem grau no máximo k , encontre uma coloração válida com $k + 1$ cores

Exercício 5: Dado grafo, um *conjunto independente* é um conjunto de nós que **não tem nenhuma aresta entre eles**

Considere um grafo G com 100 nós cujo maior conjunto independente tem tamanho 25. O número cromático de G pode ser 3?