Estruturas Discretas 2017.2

Marco Molinaro

Conteúdo

Indução Matemática

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: muito útil para demonstrar que uma propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

(Na verdade podemos aplicar a qualquer coleção de objetos com uma “ordem”, como grafos)

Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0
- **(Passo indutivo)** Para qualquer $n \geq n_0$, se *Propriedade* vale para n, então vale para $n + 1$

Então a *Propriedade* **vale para todo** inteiro $\geq n_0$

Exemplos

Exemplo

Prove que $n^2 > 3n$ *para todo inteiro* $n \geq 4$.

Exemplos – Indução Matemática

Considere o seguinte código

```
Prog1(int n)
    If n=1
        Print('OI')
        Return
    Else
        For i = 1 to n
            Print('OI')
        End for
        Prog1(n-1)
    End if
```

Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra "OI" é impressa quando Prog1 é chamado com parâmetro n

Proposição

Para todo inteiro $n \geq 1$, $T(n) \leq n^2$

Exemplos – Indução Matemática

Teorema

A soma dos angulos de um triangulo é 180

Exemplos – Indução Matemática

Teorema

A soma dos angulos de um triangulo é 180

Não vamos provar esse teorema

Exemplos – Indução Matemática

Teorema

A soma dos angulos de um triangulo é 180

Não vamos provar esse teorema

Mas vamos utilizar pra provar a seguinte generalização

Exemplos – Indução Matemática

Teorema

A soma dos angulos de um triangulo é 180

Não vamos provar esse teorema

Mas vamos utilizar pra provar a seguinte generalização

Proposição

A soma dos ângulos de um polígono convexo de n *vértices é* $180(n-2)$ *para todo* $n \geq 3$.

Exemplos

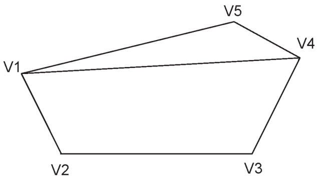
Prova: (um pouco informal, precisa de mais detalhes)

Caso base: $n = 3$ Nesse caso o poligono é um triangulo, e sabemos pelo teorema acima que

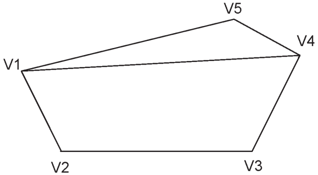
$$\text{soma dos angulos } = 180 = 180 \cdot (3 - 2).$$

Passo Indutivo. Assuma que a propriedade vale para um inteiro n **(hipótese indutiva)**

Precisamos mostrar que ela também vale para $n+1$.

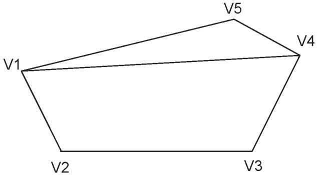


Considere um polígono com $n + 1$ vértices $V_1, V_2, ..., V_{n+1}$



Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$

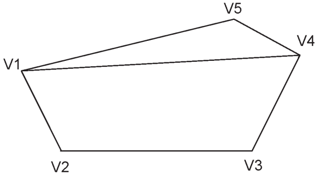
Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n



Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, ..., V_{n+1}$

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desta forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

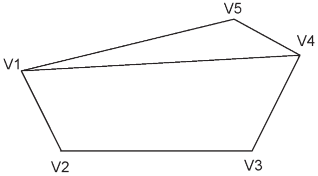


Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desta forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

A soma dos angulos do triangulo é 180.

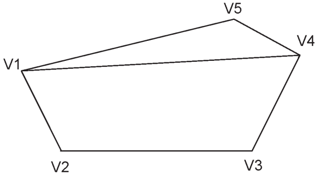


Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desta forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

A soma dos angulos do triangulo é 180. E pela **hipótese indutiva** a soma dos angulos do poligono restante é $180(n-2)$



Considere um polígono com $n+1$ vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$

Trace a reta unindo os vértices V_1 e V_n

Obtemos o Desta forma, obtemos um **triângulo** $V_1 V_n V_{n+1}$ e um **polígono restante de n vértices**

A soma dos angulos do triangulo é 180. E pela **hipótese indutiva** a soma dos angulos do poligono restante é $180(n-2)$

Logo a soma dos angulos do poligono original é [triangulo] + [resto]:

$$180 + 180(n-2) = 180((n+1)-2).$$

Indução Forte

Indução Forte X Indução Fraca

Para provar *Propriedade* para todo inteiro $n \geq n_0$ basta mostrar:

Indução (fraca)

- **(Caso base)** Que *Propriedade* vale para n_0
- **(Passo indutivo)** Assume que *Propriedade* **vale para** n, mostra que vale para $n + 1$

Indução Forte X Indução Fraca

Para provar *Propriedade* para todo inteiro $n \geq n_0$ basta mostrar:

Indução (fraca)

- **(Caso base)** Que *Propriedade* vale para n_0
- **(Passo indutivo)** Assume que *Propriedade* **vale para** n, mostra que vale para $n + 1$

Na verdade, no passo indutivo podemos utilizar que a **propriedade vale para todo caso menor ou igual a** n para provar que vale para $n + 1$

Indução Forte X Indução Fraca

Para provar *Propriedade* para todo inteiro $n \geq n_0$ basta mostrar:

Indução (fraca)

- **(Caso base)** Que *Propriedade* vale para n_0
- **(Passo indutivo)** Assume que *Propriedade* **vale para** n, mostra que vale para $n + 1$

Na verdade, no passo indutivo podemos utilizar que a **propriedade vale para todo caso menor ou igual a** n para provar que vale para $n + 1$

Indução forte

- **(Caso base)** Que *Propriedade* vale para n_0
- **(Passo indutivo)** Assume que propriedade vale para **todos os números** $\{n_0, n_0 + 1, \ldots, n\}$, mostra que vale para n + 1

Exemplos

Proposição

Para todo $n \geq 2$, n é um produto de alguns números primos (se o número é primo, o produto só tem um termo)

Exemplos

Proposição

Para todo $n \geq 2$, n é um produto de alguns números primos (se o número é primo, o produto só tem um termo)

Prova: Por indução **forte**

Caso base: $n = 2$. A propriedade vale para 2, pois é primo

Exemplos

Proposição

Para todo $n \geq 2$, n é um produto de alguns números primos (se o número é primo, o produto só tem um termo)

Prova: Por indução **forte**
Caso base: $n = 2$**.** A propriedade vale para 2, pois é primo

Passo Indutivo. Assuma que **todos os números** $\{2, 3, \ldots, n\}$ são produtos de alguns números primos

Precisamos mostrar que $n + 1$ é produto de primos

Exemplos

Proposição

Para todo $n \geq 2$, n é um produto de alguns números primos (se o número é primo, o produto só tem um termo)

Prova: Por indução **forte**

Caso base: $n = 2$. A propriedade vale para 2, pois é primo

Passo Indutivo. Assuma que **todos os números** $\{2, 3, \ldots, n\}$ são produtos de alguns números primos

Precisamos mostrar que $n + 1$ é produto de primos

Caso 1: $n + 1$ **é primo.** Neste caso $n + 1$ tem a propriedade desejada

Exemplos

Caso 2: $n+1$ não é primo. Então $n+1$ é composto

Exemplos

Caso 2: $n + 1$ **não é primo.** Então $n + 1$ é composto

Portanto existem naturais $a, b \geq 1$ **menor que** $n + 1$ tal que $n + 1 = a \cdot b$.

Exemplos

Caso 2: $n+1$ **não é primo.** Então $n+1$ é composto

Portanto existem naturais $a, b \geq 1$ **menor que** $n+1$ tal que $n+1 = a \cdot b$.

Como a, b são **menores ou iguais a** n, pela **hípotese indutiva** a é produto de alguns primos, e o mesmo vale para b

Exemplos

Caso 2: $n+1$ **não é primo.** Então $n+1$ é composto

Portanto existem naturais $a, b \geq 1$ **menor que** $n+1$ tal que $n+1 = a \cdot b$.

Como a, b são **menores ou iguais a** n, pela **hípotese indutiva** a é produto de alguns primos, e o mesmo vale para b

Como $n+1 = a \cdot b, \quad n+1$ é produto de alguns número primos

Cuidado!

Muito cuidado: Em indução forte, muitas vezes precisamos **provar mais de um valor de n "na mão"**

Cuidado!

Muito cuidado: Em indução forte, muitas vezes precisamos **provar mais de um valor de n "na mão"**

Ou seja, temos multiplos **casos base**

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \qquad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \qquad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \qquad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:

Caso base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \quad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:
Caso base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Exemplo

Considere a sequencia $a_1, a_2, \ldots$ definida como

- $a_1 = 1, \qquad a_2 = 3$
- $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 3$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:

Caso base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, t tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:
Caso base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, t tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova errada:

Caso base: $n = 1$**.** Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, t tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Substituindo na expressão de a_{n+1} temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2k+1) + 2 \cdot (2t+1) \\ &= 2k + 4t + 3 = 2(k + 2t + 1) + 1 \end{aligned}$$

Proposição

Para todo $n \geq 1$, a_n é impar

Prova **errada:**
Caso base: $n = 1$**.** Temos que $a_1 = 1$ é impar.

Passo indutivo. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, t tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Substituindo na expressão de a_{n+1} temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2k + 1) + 2 \cdot (2t + 1) \\ &= 2k + 4t + 3 = 2(k + 2t + 1) + 1 \end{aligned}$$

Portanto a_{n+1} é impar. Isso conclui o passo indutivo. Fim de prova.

O problema é que tentamos referenciar “2 pra trás” quando usamos $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, mas isso não é possivel quando $n + 1 = 2$

$$n - 1 = 0 \text{ e } a_0 \text{ não está definido}$$

O problema é que tentamos referenciar "2 pra trás" quando usamos $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, mas isso não é possivel quando $n + 1 = 2$

$$n - 1 = 0 \text{ e } a_0 \text{ não está definido}$$

(Note que esse referencia do tipo "2 pra trás" so acontece em indução **forte**)

O problema é que tentamos referenciar "2 pra trás" quando usamos $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, mas isso não é possivel quando $n + 1 = 2$

$$n - 1 = 0 \text{ e } a_0 \text{ não está definido}$$

(Note que esse referencia do tipo "2 pra trás" so acontece em indução **forte**)

Portanto, temos que provar para a_2 "na mão"

Prova correta:

Casos base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar

$n = 2$. Temos que $a_2 = 3$ é impar

Prova correta:

Casos base: $n = 1$. Temos que $a_1 = 1$ é impar
$n = 2$. Temos que $a_2 = 3$ é impar

Passo indutivo. Considere $n \geq 2$. Suponha que a propriedade vale para $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Precisamos provar que vale para a_{n+1}

Por definição $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$. Pela **hipótese indutiva**, a_{n-1} e a_n são impares, portanto existem inteiros k, m tal que

$$a_{n-1} = 2k + 1 \qquad a_n = 2t + 1$$

Substituindo na expressão de a_{n+1} temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2k+1) + 2 \cdot (2t+1) \\ &= 2k + 4t + 3 = 2(k + 2t + 1) + 1 \end{aligned}$$

Portanto a_{n+1} é impar. Isso conclui o passo indutivo. Fim de prova.

Exercicios

Exercicio: Prove por indução **forte** que todo valor maior ou igual a \$8 unidades pode ser pago exatamente utilizando apenas essas notas de \$3 e \$5

Verifique que você provou todos os casos base necessários