Estruturas Discretas 2017.2

Marco Molinaro

Conteúdo

Tipos de Demonstração

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**
- **Força-bruta**: proposição com numero **finito** de possibilidades

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**
- **Força-bruta**: proposição com numero **finito** de possibilidades
- **Direta**: A partir da **hipotese** (o que é conhecido/dado sobre o objeto) encadeamento de passos até obter a **tese** (o que queremos provar)

Recapitulação

Na última aula vimos alguns tipos de prova

- Por **exemplo** (desprova por contra-exemplo): proposições do tipo **existe**
- **Construtiva**: generalização, pode ser usado pra proposições do tipo **existem infinitos**
- **Força-bruta**: proposição com numero **finito** de possibilidades
- **Direta**: A partir da **hipotese** (o que é conhecido/dado sobre o objeto) encadeamento de passos até obter a **tese** (o que queremos provar)

Hoje: **Contradição** e **Indução**

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é **verdadeira** vamos:

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é **verdadeira** vamos:

- **Assumir que proposição é falsa**

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é **verdadeira** vamos:

- **Assumir que proposição é falsa**
- Mostrar que isso **leva a contradição** de algo que conhecemos/assumimos (e.g. isso implica que 2 é impar)

Prova por Contradição

Prova por contradição: Para provar que a proposição é **verdadeira** vamos:

- **Assumir que proposição é falsa**
- Mostrar que isso **leva a contradição** de algo que conhecemos/assumimos (e.g. isso implica que 2 é impar)

$\Rightarrow$ Portanto a proposição **não pode ser falsa**

Prova por Contradição

1 é o menor numero natural. Vamos mostrar que não existe o menor número **racional**

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Mas o numero $r/2$ é um número racional positivo (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Mas o numero $r/2$ é um número racional positivo (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Como r é positivo, $r > r/2$ **(estritamente)** (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Mas o numero $r/2$ é um número racional positivo (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Como r é positivo, $r > r/2$ **(estritamente)** (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Então isso **contradiz** que r é menor ou igual a todos os números racionais positivos

Proposição

Não existe *um número* ***racional positivo menor ou igual*** *a todos os números racionais positivos*

Ideia da prova: Assuma **por contradição** que exista um número racional positivo r menor ou igual a todos os números racionais positivos

Mas o numero $r/2$ é um número racional positivo (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Como r é positivo, $r > r/2$ **(estritamente)** (Tecnicamente teríamos que provar isso!)

Então isso **contradiz** que r é menor ou igual a todos os números racionais positivos

Portanto, a hípotese na linha 1 é falsa, ou seja, a proposição é verdadeira

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é par mas n é **impar**

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é par mas n é **impar**

Como n é impar, por definição existe inteiro m tal que $n = 2m + 1$

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é par mas n é **impar**

Como n é impar, por definição existe inteiro m tal que $n = 2m + 1$
Então

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

Prova por Contradição

Proposição

Para todo *número inteiro n, se n^2 é par então n é par*

(Vamos utilizar o "fato" que se um número não é par, então é impar; tecnicamente teríamos que provar isso! Por exemplo, por indução)

Prova: Assuma **por contradição** que a proposição **não é verdade**

Ou seja, **existe** um número n tal que n^2 é par mas n é **impar**

Como n é impar, por definição existe inteiro m tal que $n = 2m + 1$
Então

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

Portanto, n^2 é **impar**. Isso **contradiz** que n^2 é par. Fim da prova.

Prova por Contradição

Definição

Um número x é ***racional*** *se existem inteiros p e $q \neq 0$* ***primos entre si*** *tal que $x = p/q$*

Prova por Contradição

Definição

*Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$*

Proposição

$\sqrt{2}$ ***não*** *é um* ***número racional***

Prova por Contradição

Definição

*Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$*

Proposição

$\sqrt{2}$ ***não*** *é um* ***número racional***

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ **é racional**

Prova por Contradição

Definição

*Um número x é **racional** se existem inteiros p e $q \neq 0$ **primos entre si** tal que $x = p/q$*

Proposição

$\sqrt{2}$ ***não*** *é um* ***número racional***

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ **é racional**

Por definição, existem inteiros p e $q \neq 0$ sem fatores comum tal que $\sqrt{2} = p/q$

Prova por Contradição

Definição

Um número x é ***racional*** *se existem inteiros p e $q \neq 0$* ***primos entre si*** *tal que $x = p/q$*

Proposição

$\sqrt{2}$ ***não*** *é um* ***número racional***

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ **é racional**

Por definição, existem inteiros p e $q \neq 0$ sem fatores comum tal que $\sqrt{2} = p/q$

Rearrumando temos $p = \sqrt{2} \cdot q$, o que implica $p^2 = 2q^2$ (1)

Prova por Contradição

Definição

Um número x é ***racional*** *se existem inteiros p e $q \neq 0$* ***primos entre si*** *tal que $x = p/q$*

Proposição

$\sqrt{2}$ ***não*** *é um* ***número racional***

Prova: Assuma **por contradição** que $\sqrt{2}$ **é racional**

Por definição, existem inteiros p e $q \neq 0$ sem fatores comum tal que $\sqrt{2} = p/q$

Rearrumando temos $p = \sqrt{2} \cdot q$, o que implica $p^2 = 2q^2$ (1)

Portanto p^2 é par. Pela **proposição do slide anterior**, isso implica que p é **par**

Prova por Contradição

Então existe inteiro m tal que $p = 2m$. Utilizando isso na equação (1) temos:

Prova por Contradição

Então existe inteiro m tal que $p = 2m$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$\begin{aligned} & p^2 = 2q^2 \\ \Rightarrow\ & q^2 = \frac{p^2}{2} \\ \Rightarrow\ & q^2 = \frac{4m^2}{2} = 2m^2 \\ \Rightarrow\ & q^2 \text{ é par} \end{aligned}$$

Prova por Contradição

Então existe inteiro m tal que $p = 2m$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$
\begin{aligned}
& p^2 = 2q^2 \\
\Rightarrow\ & q^2 = \frac{p^2}{2} \\
\Rightarrow\ & q^2 = \frac{4m^2}{2} = 2m^2 \\
\Rightarrow\ & q^2 \text{ é par}
\end{aligned}
$$

Novamente utilizando a **proposição do slide anterior**, isso implica que q é **par**

Prova por Contradição

Então existe inteiro m tal que $p = 2m$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$\begin{aligned} & p^2 = 2q^2 \\ \Rightarrow\ & q^2 = \frac{p^2}{2} \\ \Rightarrow\ & q^2 = \frac{4m^2}{2} = 2m^2 \\ \Rightarrow\ & q^2 \text{ é par} \end{aligned}$$

Novamente utilizando a **proposição do slide anterior**, isso implica que q é **par**

Como p e q são ambos par, eles **têm 2 como fator comum**

Prova por Contradição

Então existe inteiro m tal que $p = 2m$. Utilizando isso na equação (1) temos:

$$
\begin{aligned}
& p^2 = 2q^2 \\
\Rightarrow\ & q^2 = \frac{p^2}{2} \\
\Rightarrow\ & q^2 = \frac{4m^2}{2} = 2m^2 \\
\Rightarrow\ & q^2 \text{ é par}
\end{aligned}
$$

Novamente utilizando a **proposição do slide anterior**, isso implica que q é **par**

Como p e q são ambos par, eles **têm 2 como fator comum**

Isso **contradiz** que p e q não têm fator comum. Fim de prova

Prova por contradição

(Opcional)

Obs: Prova por contradição é um pouco **diferente** de simplesmente tentar **desprovar a negação**

Prova por contradição

(Opcional)

Obs: Prova por contradição é um pouco **diferente** de simplesmente tentar **desprovar a negação**

Isso porque na contradição podemos **usar** o fato que **assumimos a proposição ser falsa** durante a prova

Prova por contradição

(Opcional)

Obs: Prova por contradição é um pouco **diferente** de simplesmente tentar **desprovar a negação**

Isso porque na contradição podemos **usar** o fato que **assumimos a proposição ser falsa** durante a prova

Pode **facilitar** muito a prova

Prova por contradição

(Opcional)

Obs: Prova por contradição é um pouco **diferente** de simplesmente tentar **desprovar a negação**

Isso porque na contradição podemos **usar** o fato que **assumimos a proposição ser falsa** durante a prova

Pode **facilitar** muito a prova

Tem matemáticos (Construtivistas) que não “acreditam” em provas por contradição (porque eles não acreditam que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa)

Prova por Contradição

Exercicio: Demonstre as seguintes proposições por contradição:

- Não existe número inteiro n **impar** tal que $3n + 2$ é par
- Se x é um número racional e y é um número **irracional**, então $x + y$ é irracional

Indução Matemática

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: muito útil para demonstrar que uma propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: muito útil para demonstrar que uma propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

(Na verdade podemos aplicar a qualquer coleção de objetos com uma “ordem”, como grafos)

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: muito útil para demonstrar que uma propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

(Na verdade podemos aplicar a qualquer coleção de objetos com uma "ordem", como grafos)

Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: muito útil para demonstrar que uma propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

(Na verdade podemos aplicar a qualquer coleção de objetos com uma "ordem", como grafos)

Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: muito útil para demonstrar que uma propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

(Na verdade podemos aplicar a qualquer coleção de objetos com uma "ordem", como grafos)

Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0
- **(Passo indutivo)** Para qualquer $n \geq n_0$, se *Propriedade* vale para n, então vale para $n + 1$

Definição – Indução Matemática

Indução Matemática: muito útil para demonstrar que uma propriedade propriedade vale **para todo** inteiro maior ou igual a um inteiro inicial n_0

(Na verdade podemos aplicar a qualquer coleção de objetos com uma "ordem", como grafos)

Princípio da Indução

Suponha que uma *Propriedade*:

- **(Caso base)** Vale para um inteiro n_0
- **(Passo indutivo)** Para qualquer $n \geq n_0$, se *Propriedade* vale para n, então vale para $n + 1$

Então a *Propriedade* **vale para todo** inteiro $\geq n_0$

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que o Sr. Silva casou e teve 2 filhos
Suponha que cada filho do Sr. Silva casou e tenha tido dois filhos
Assuma que este processo continue
Prove pra todo $n \geq 0$, *a* n*-ésima geração tem* 2^n *pessoas (Sr. Silva é a geração 0)*

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que o Sr. Silva casou e teve 2 filhos
Suponha que cada filho do Sr. Silva casou e tenha tido dois filhos
Assuma que este processo continue
Prove pra todo $n \geq 0$, a n-ésima geração tem 2^n pessoas (Sr. Silva é a geração 0)

Prova:

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que o Sr. Silva casou e teve 2 filhos
Suponha que cada filho do Sr. Silva casou e tenha tido dois filhos
Assuma que este processo continue
Prove pra todo $n \geq 0$, a n-ésima geração tem 2^n pessoas (Sr. Silva é a geração 0)

Prova:
Propriedade que queremos provar para todo inteiro $n \geq 0$: geração n tem 2^n pessoas

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que o Sr. Silva casou e teve 2 filhos
Suponha que cada filho do Sr. Silva casou e tenha tido dois filhos
Assuma que este processo continue
Prove pra todo $n \geq 0$, a n-ésima geração tem 2^n pessoas (Sr. Silva é a geração 0)

Prova:
Propriedade que queremos provar para todo inteiro $n \geq 0$: geração n tem 2^n pessoas

Caso base: $n = 0$. Precisamos verificar que a propriedade vale nesse caso

Exemplo

Exemplo (Informal)

Suponha que o Sr. Silva casou e teve 2 filhos
Suponha que cada filho do Sr. Silva casou e tenha tido dois filhos
Assuma que este processo continue
Prove pra todo $n \geq 0$, *a* n*-ésima geração tem* 2^n *pessoas (Sr. Silva é a geração 0)*

Prova:
Propriedade que queremos provar para todo inteiro $n \geq 0$: geração n tem 2^n pessoas

Caso base: $n = 0$**.** Precisamos verificar que a propriedade vale nesse caso

Por definição a geração 0 é só o Sr. Silva, e portanto tem $2^0 = 1$ pessoa. Então a propriedade vale pro caso base

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n+1$

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n+1$

Para isso vamos representar a situação da geração $n+1$ em relação a geração n:

$$[\#\text{ pessoas na geração } n+1] = 2 \cdot [\#\text{ pessoas na geração } n]$$

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n+1$

Para isso vamos representar a situação da geração $n+1$ em relação a geração n:

$$[\#\text{ pessoas na geração } n+1] = 2 \cdot [\#\text{ pessoas na geração } n]$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para n:

$$[\#\text{ pessoas na geração } n+1] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n+1$

Para isso vamos representar a situação da geração $n+1$ em relação a geração n:

$$[\#\text{ pessoas na geração } n+1] = 2 \cdot [\#\text{ pessoas na geração } n]$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para n:

$$[\#\text{ pessoas na geração } n+1] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Portanto a propriedade vale para $n+1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Exemplo

Passo indutivo. Para provar o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para n; precisamos mostrar que ela vale para $n+1$

Para isso vamos representar a situação da geração $n+1$ em relação a geração n:

$$[\# \text{ pessoas na geração } n+1] = 2 \cdot [\# \text{ pessoas na geração } n]$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para n:

$$[\# \text{ pessoas na geração } n+1] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Portanto a propriedade vale para $n+1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Com isso, concluímos a prova por indução

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

Prova:

Propriedade que queremos provar pra todo $k \geq 1$:
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

Prova:
Propriedade que queremos provar pra todo $k \geq 1$:
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$

Caso base: $k = 1$**.** Para provar o caso base, verificamos que a propriedade vale nesse caso: $(2 \cdot 1 - 1) = 1^2$

Exemplo

Proposição

Para todo inteiro $k \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

Prova:

Propriedade que queremos provar pra todo $k \geq 1$: $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$

Caso base: $k = 1$**.** Para provar o caso base, verificamos que a propriedade vale nesse caso: $(2 \cdot 1 - 1) = 1^2$

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para k; precisamos mostrar que ela vale para $k+1$

Exemplo

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para k; precisamos mostrar que ela vale para $k + 1$

[Fazer explicitamente pra $k = 1$, $k = 2$?]

Exemplo

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para k; precisamos mostrar que ela vale para $k+1$

[Fazer explicitamente pra $k = 1$, $k = 2$?]

Para isso vamos representar a propriedade para $k+1$ em relação a propriedade para k:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)}_{\text{prop para } k+1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(2i-1)}_{\text{prop para } k} + (2[k+1]-1)$$

Exemplo

Passo indutivo. Para prova o passo indutivo, suponha que a propriedade valha para k; precisamos mostrar que ela vale para $k+1$

[Fazer explicitamente pra $k = 1$, $k = 2$?]

Para isso vamos representar a propriedade para $k+1$ em relação a propriedade para k:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)}_{\text{prop para } k+1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(2i-1)}_{\text{prop para } k} + (2[k+1]-1)$$

Usando a **hipótese indutiva**, ou seja, que a propriedade vale para k:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = k^2 + (2[k+1]-1)$$

Exemplo

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = k^2 + (2[k+1]-1)$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k+1)^2$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= k^2 + (2[k+1]-1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Portanto a propriedade vale para $k+1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Exemplo

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = {\color{red}k^2} + (2[k+1]-1)$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k+1)^2$$

Portanto a propriedade vale para $k+1$. Isso **prova o Passo Indutivo**

Com isso, concluímos a prova por indução

Indução Matemática

Exercício: Prove por indução as seguintes proposições

- Para todo inteiro $n \geq 2$, $2^{n+1} < 3^n$
- Todo número inteiro $n \geq 0$ é par ou impar (veja definição de par/impar no slide da última aula)
- Para todo inteiro $n \geq 4$, $n^2 > 3n$