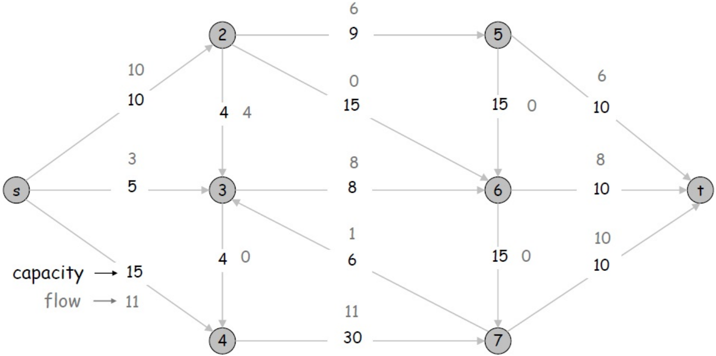
Fluxo em Redes

Definição (Fluxo)

Fluxo *s-t: fluxo $f(e)$ para cada aresta e satisfazendo*

– *Para cada aresta e:* $0 \leq f(e) \leq c(e)$ *(capacidade)*
– *Para cada nó $v \neq s, t$:* $\sum_{e \text{ entra } v} f(e) = \sum_{e \text{ sai } v} f(e)$ *(conservação)*

Valor do fluxo: $\sum_{e \text{ sai } s} f(e)$ *(fluxo saindo de s)*



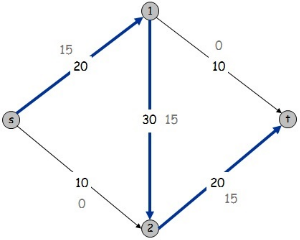
Fluxos

Ultima aula vimos propriedades estruturais de fluxos: fluxos máximo e cortes

Pergunta: Como encontrar um fluxo s-t máximo?

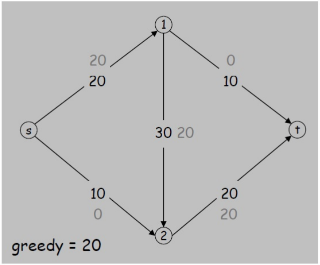
Fluxos

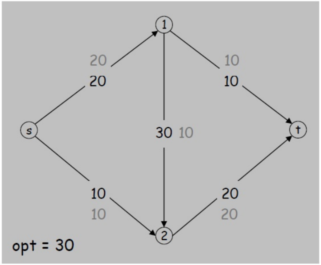
Pergunta: Podemos aumentar o fluxo abaixo?



Fluxos

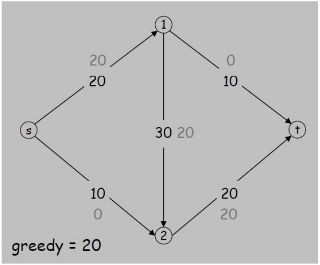
O algoritmo guloso que tenta aumentar o fluxo passando mais fluxo em um caminho pode ficar empacado e não obter o fluxo máximo

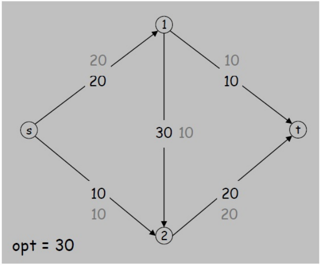




Fluxos

O algoritmo guloso que tenta aumentar o fluxo passando mais fluxo em um caminho pode ficar empacado e não obter o fluxo máximo





Problema: As vezes tem que reduzir fluxo em umas arestas para conseguir progredir

Ilustrar na esquerda, caminho s-2-1-t

Fluxos

Para modelar redução de fluxo, usamos rede residual que tem arestas no sentido contrário que nos deixa “despassar” fluxo

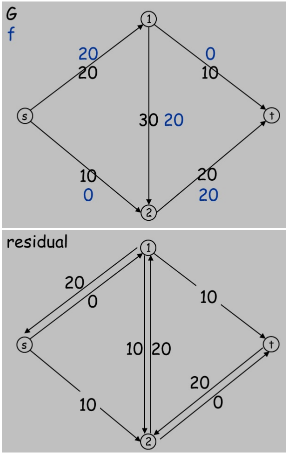
Rede residual

– Dado um grafo G direcionado com capacidades e um fluxo f

– A rede residual G^f tem os mesmos nós de G, e:

a) Se aresta e ainda tem capacidade restante, adicionamos ela na rede residual com capacidade $c(e) - f(e)$

b) Se tem fluxo passando pela aresta $e = (u, v)$ adicionamos na rede residual a aresta reversa $\bar{e} = (v, u)$ com capacidade $f(e)$



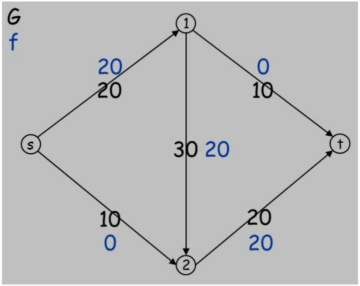
Rede residual

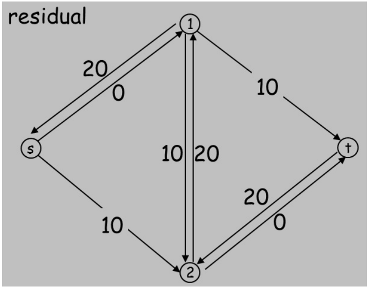
– Dado um grafo G direcionado com capacidades e um fluxo f

– A rede residual G^f tem os mesmos nós de G, e:

a) Se aresta e ainda tem capacidade restante, adicionamos ela na rede residual com capacidade $c(e) - f(e)$

b) Se tem fluxo passando pela aresta $e = (u, v)$ adicionamos na rede residual a aresta reversa $\bar{e} = (v, u)$ com capacidade $f(e)$





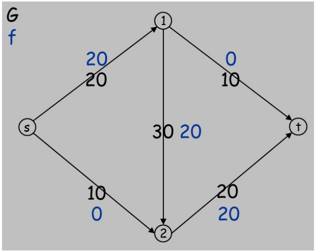
Fluxos

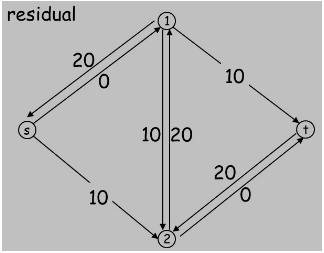
(Para simplificar, pode pensar que em G para cada par de nós u, v não temos arestas em ambas as direções, i.e., arestas (u, v) e (v, u))

Note que a rede residual depende do fluxo atual; se atualizarmos o fluxo, temos que atualizar a rede residual

Podemos aumentar o fluxo utilizando a rede residual:

– Escolhemos um caminho s-t Pna rede residual e aumentamos quantidade $\min_{e \in P} c_{residual}(e)$ de fluxo no caminho





Isso garante que não violaremos capacidades originais $c(e)$ e não reduzimos mais fluxo em uma aresta do que existe

Fluxo

Com essa habilidade de remover fluxo, não ficamos empacados

Algoritmo Ford-Fulkerson para fluxo s-t máximo:

1) Comece com o fluxo f vazio ($f(e) = 0$ para toda aresta e)

2) Monte a rede residual G^f

3) Encontre um caminho s-t P na rede residual, e aumente o fluxo por $\min_{e \in P} c_{residual}(e)$ unidades nesse caminho

Caso não exista tal caminho, pare

4) Repita do Passo 2

Fluxo

Com essa habilidade de remover fluxo, não ficamos empacados

Algoritmo Ford-Fulkerson para fluxo s-t máximo:

1) Comece com o fluxo f vazio ($f(e) = 0$ para toda aresta e)

2) Monte a rede residual G^f

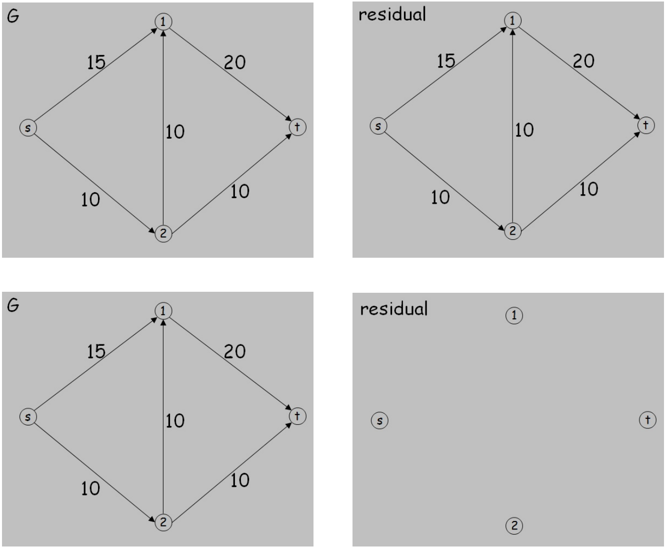
3) Encontre um caminho s-t P na rede residual, e aumente o fluxo por $\min_{e \in P} c_{residual}(e)$ unidades nesse caminho

Caso não exista tal caminho, pare

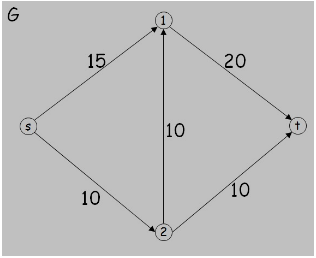
4) Repita do Passo 2

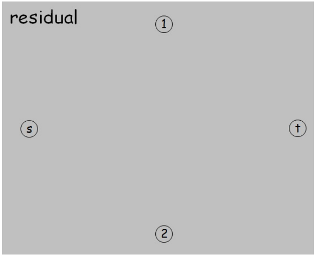
Obs: No Passo 3 podemos usar qualquer caminho s-t. Escolhas bem feitas levam a algoritmos mais eficientes

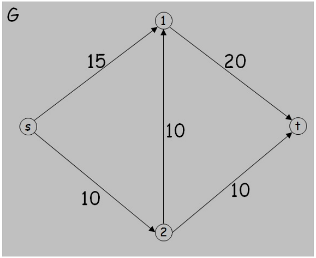
Exemplo: [Use caminho mais longo]

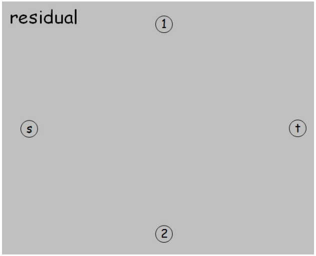


Exemplo: [Use caminho mais longo]

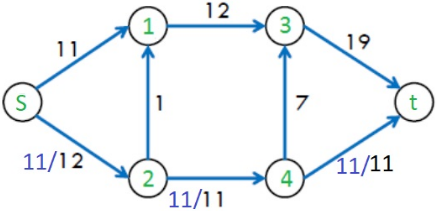








Exercício 1: Dado o grafo e fluxo abaixo (em azul), encontre a rede residual



Exercício 2: Utilizando o fluxo acima como ponto de partida, encontre o fluxo máximo no grafo acima usando Ford-Fulkerson

Modelando com Fluxo Máximo

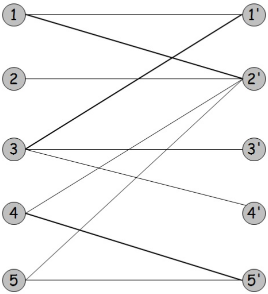
Modelando

Observação importante: Se as capacidades forem inteiras existe fluxo máximo inteiro
(i.e., $f(e)$ é número inteiro para todas as arestas)

Segue do fato que, nesse caso, Ford-Fulkerson sempre muda o fluxo de uma aresta de uma quantidade inteira

Aplicação 1: Emparelhamento Máximo

Como utilizar fluxo máximo para encontrar emparelhamento máximo em grafo bipartido?



Aplicação 1: Emparelhamento Máximo

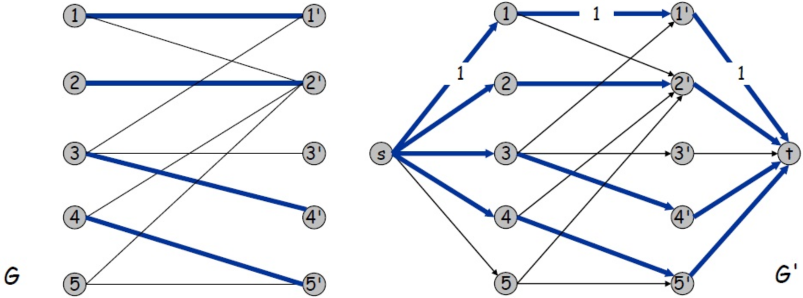
Resp: Crie o grafo direcionado G' a partir de G assim:

1) Direcione as arestas do grafo da esquerda pra direita
1) Adicione nós s, t
2) Conecte s a todos os nós da esquerda, conecte todos os nós da direita a t
3) Coloque capacidade 1 em todas as aresta

Aplicação 1: Emparelhamento Máximo

Lema

Existe uma bijeção (correspondência 1-para-1) entre emparelhamentos máximos em G e fluxos máximo inteiros em G'



Exercícios

Exercício 3: Dado um grafo não-direcionado, um *3-emparelhamento* é um conjunto de aresta E' onde cada nó é ponte de no máximo 3 arestas em E'

Mostre como utilizar fluxo máximo para encontrar o maior 3-emparelhamento em um grafo bipartido