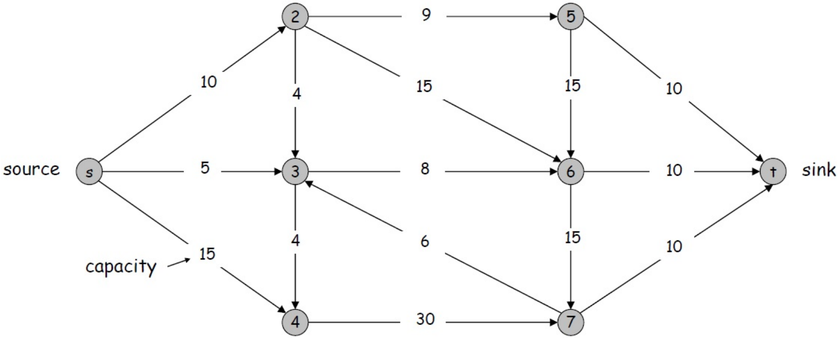
Fluxo em Redes

Definição (Fluxo)

É dado um grafo direcionado, onde cada aresta e tem capacidade $c(e)$.

Dados nós s, t, *um* ***fluxo*** s-t *é uma atribuição de valor (fluxo)* $f(e)$ *para cada aresta e satisfazendo:*

– *Para cada aresta e:* $0 \leq f(e) \leq c(e)$ *(capacidade)*
– *Para cada nó* $v \neq s, t$: $\sum_{e \text{ entra } v} f(e) = \sum_{e \text{ sai } v} f(e)$ *(conservação)*

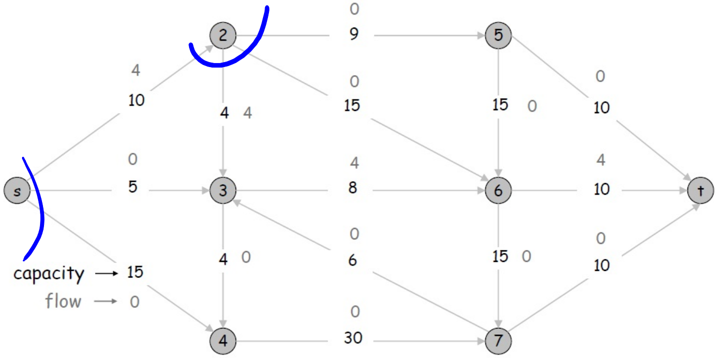


Definição (Fluxo)

É dado um grafo direcionado, onde cada aresta e tem capacidade $c(e)$.

Dados nós s, t, *um **fluxo*** s-t *é uma atribuição de valor (fluxo)* $f(e)$ *para cada aresta e satisfazendo:*

– *Para cada aresta e:* $0 \leq f(e) \leq c(e)$ *(capacidade)*
– *Para cada nó* $v \neq s, t$: $\sum_{e \text{ entra } v} f(e) = \sum_{e \text{ sai } v} f(e)$ *(conservação)*



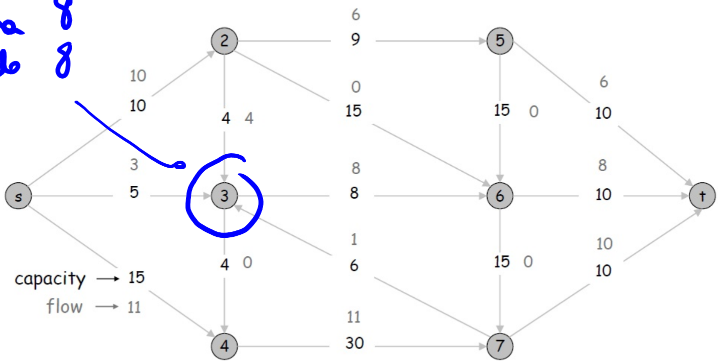
Definição (Fluxo)

É dado um grafo direcionado, onde cada aresta e tem capacidade $c(e)$.

Dados nós s, t, um ***fluxo*** *s-t é uma atribuição de valor (fluxo) $f(e)$ para cada aresta e satisfazendo:*

– *Para cada aresta e:* $0 \leq f(e) \leq c(e)$ *(capacidade)*
– *Para cada nó $v \neq s, t$:* $\sum_{e \text{ entra } v} f(e) = \sum_{e \text{ sai } v} f(e)$ *(conservação)*

entra 8
saindo 8



Fluxos

Muitas aplicações

Survey Design

Airline Scheduling

Image Segmentation

Project Selection

Sport Elimination

Matching

. . .

(Caminho mais curto, etc.)

(Livro “Network Flows”, Ajuha, Magnanti, Orlin)

Fluxos

Perspectiva mais natural de fluxos:

Lema (Decomposição de fluxo, informal)

Todo fluxo é uma união de "fluxos-caminho" e "fluxos-ciclo"

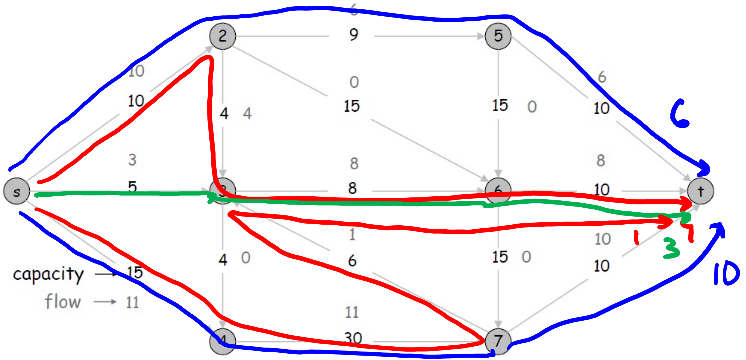
Fluxos

Perspectiva mais natural de fluxos:

Lema (Decomposição de fluxo, informal)

Todo fluxo é uma união de "fluxos-caminho" e "fluxos-ciclo"

Ideia de prova: "Descasque" fluxos-caminho sucessivamente



capacity
flow
s
t
2
5
6
7
4
6
10
3
1
10

Fluxos

Problema: Dadas as capacidades, qual é a "maior quantidade de fluxo" que podemos passar de s a t? $\Rightarrow$ **fluxo máximo**

Fluxos

Problema: Dadas as capacidades, qual é a "maior quantidade de fluxo" que podemos passar de s a t? $\Rightarrow$ **fluxo máximo**

Assumimos que s não tem aresta entrando, pra simplificar

Fluxos

Problema: Dadas as capacidades, qual é a "maior quantidade de fluxo" que podemos passar de s a t? $\Rightarrow$ **fluxo máximo**

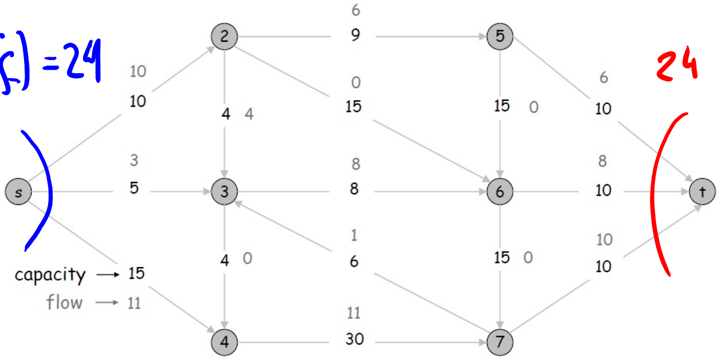
Assumimos que s não tem aresta entrando, pra simplificar

Definição (Valor do fluxo)

O ***valor do fluxo*** f *é o fluxo saindo de* s*:*

$$val(f) = \sum_{e \text{ sai } s} f(e)$$

$val(f) = 24$



2
5
s
3
6
t
4
7
6
9
10
10
0
15
4
4
15
0
6
10
3
5
8
8
8
10
1
6
4
0
15
0
10
10
capacity
15
flow
11
11
30

24

Fluxo

Pergunta: Se saem $val(f)$ unidades de fluxo de s, quanto chega a t?

Fluxo

Pergunta: Se saem $val(f)$ unidades de fluxo de s, quanto chega a t?

Resp: Chegam $val(f)$, devido a conservação de fluxo

Vamos entender melhor como as capacidades limitam os fluxos

Definição (Corte)

*Um **corte** s-t é um conjunto de nós S que contém s e não contém t*

*A **capacidade do corte** S é a soma das capacidades das arestas que vão de S para fora de S:*

$$cap(S) = \sum_{(u,v):u \in S, v \notin S} c(u,v)$$

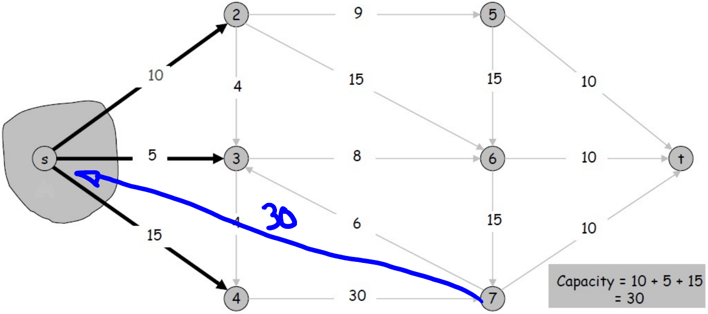
Vamos entender melhor como as capacidades limitam os fluxos

Definição (Corte)

*Um **corte** s-t é um conjunto de nós S que contém s e não contém t*

*A **capacidade do corte** S é a soma das capacidades das arestas que vão de S para fora de S:*

$$cap(S) = \sum_{(u,v):u \in S, v \notin S} c(u,v)$$



Vamos entender melhor como as capacidades limitam os fluxos

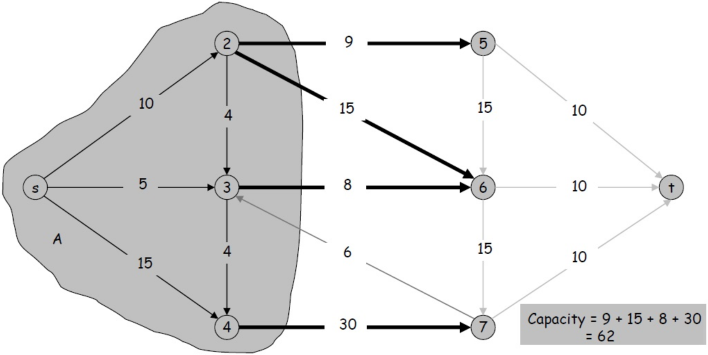
Vamos entender melhor como as capacidades limitam os fluxos

Definição (Corte)

Um ***corte*** *s-t é um conjunto de nós S que contém s e não contém t*

A ***capacidade do corte*** *S é a soma das capacidades das arestas que vão de S para fora de S:*

$$cap(S) = \sum_{(u,v): u \in S, v \notin S} c(u,v)$$



Lema

Considere um grafo direcionado com capacidades. Para todo fluxo s-t e todo corte s-t S

$$val(f) \leq cap(S)$$

Prova: Devido a conservação de fluxo todos os nós $\neq s$ tem "fluxo de entrada = fluxo de saída", então

$$\sum_{v \in S} \left(\sum_{e \text{ sai } v} f(e) - \sum_{e \text{ entra } v} f(e) \right) = \sum_{e \text{ sai } s} f(e) = val(f)$$

Prova: Devido a conservação de fluxo todos os nós $\neq s$ tem "fluxo de entrada = fluxo de saída", então

$$\sum_{v \in S} \left(\sum_{e \text{ sai } v} f(e) - \sum_{e \text{ entra } v} f(e) \right) = \sum_{e \text{ sai } s} f(e) = val(f)$$

Mas

$$\sum_{v \in S} \left(\sum_{e \text{ sai } v} f(e) - \sum_{e \text{ entra } v} f(e) \right) = \sum_{e \text{ saindo de } S} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } S} f(e) :$$

– Aresta e com as duas pontas em S contribui 0: + e - cancelam
– Aresta e com as duas pontas fora de S contribui 0
– Aresta e saindo de S contribui $+f(e)$
– Aresta e entrando em S contribui $-f(e)$

Colocando essas observações juntas temos

$$
\begin{aligned}
val(f) &= \sum_{v \in S} \left(\sum_{e \text{ sai } v} f(e) - \sum_{e \text{ entra } v} f(e) \right) \\
&= \sum_{e \text{ saindo de } S} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } S} f(e) \\
&\leq \sum_{e \text{ saindo de } S} f(e) \quad \leq \sum_{e \text{ saindo de } S} c(e) \\
&= cap(S)
\end{aligned}
$$

$\square$

Fluxo

Em particular, o lema anterior funciona para o fluxo máximo e corte com menor capacidade

Corolário

O fluxo máximo tem valor $\leq$ à capacidade do corte de menor capacidade

Fluxo

Em particular, o lema anterior funciona para o fluxo máximo e corte com menor capacidade

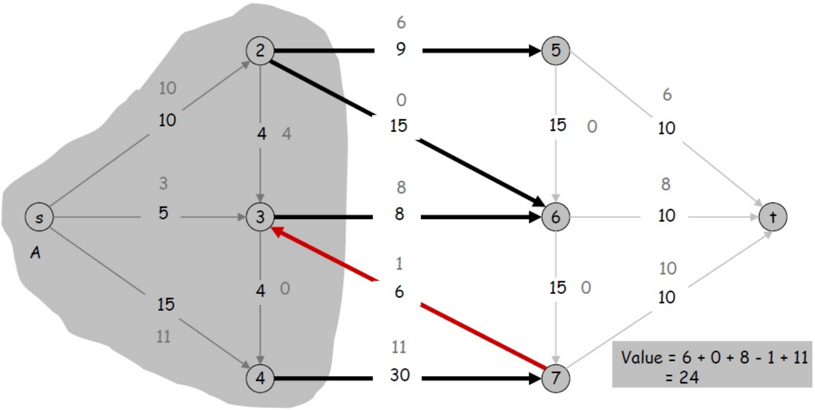
Corolário

O fluxo máximo tem valor $\leq$ à capacidade do corte de menor capacidade

Na verdade, essa relação é de igualdade

Teorema (Max-flow/min-cut)

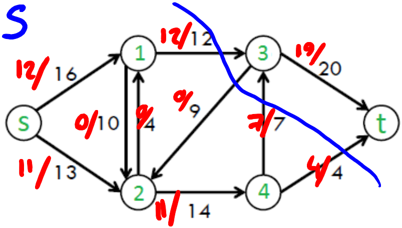
O fluxo máximo tem valor $=$ à capacidade do corte de menor capacidade



s
A
2
3
4
5
6
7
t
Value = 6 + 0 + 8 - 1 + 11
= 24

Exercício 1: Encontre o fluxo máximo no grafo abaixo

val(f) = 23



cap(S) = 23

Exercício 2: Encontre um corte que prova que o fluxo encontrado acima é máximo

Assuma t não tem aresta saindo

Exercício 3: Prove que o fluxo que entra em t é $val(f)$, ou seja

$$\sum_{e \text{ entra } t} f(e) = \sum_{e \text{ sai } s} f(e)$$