Coloração de Vértices

Coloração

Temos que armazenar 5 compostos químicos, A, B, C, D e E em recipientes

Coloração

Temos que armazenar 5 compostos químicos, A, B, C, D e E em recipientes

Para evitar contaminação os seguinte pares não podem ser armazenados no mesmo recipiente: A-B, A-C, D-E, C-D

Coloração

Temos que armazenar 5 compostos químicos, A, B, C, D e E em recipientes

Para evitar contaminação os seguinte pares não podem ser armazenados no mesmo recipiente: A-B, A-C, D-E, C-D

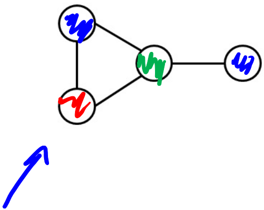
Neste caso, qual o número mínimo de recipientes que precisamos?

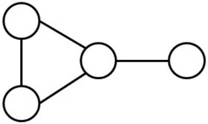
Coloração

Novamente, hoje grafos são não-direcionados

Definição (Coloração)

Uma ***coloração dos vértices*** *de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices onde vértices adjacentes recebem cores diferentes*





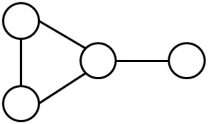
Coloração

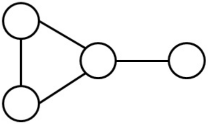
Novamente, hoje grafos são não-direcionados

Definição (Coloração)

*Uma **coloração dos vértices** de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices onde vértices adjacentes recebem cores diferentes*

$\chi(G) = 3$





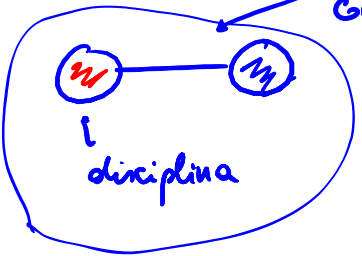
Definição (Número cromático)

*O **número cromático** de um grafo G, denotado $\chi(G)$, é o menor número de cores possíveis para uma coloração*

Aplicações: Arestas representam conflitos

Ex: (Atribuição de salas) Dada a grade de disciplinas da PUC para o próximo período (disciplinas com horários já definidos), quantas salas de aulas são necessárias?

Conflito de hora



← Cores ≡ salas

Coloração

Aplicações: Arestas representam conflitos

Ex: (Atribuição de salas) Dada a grade de disciplinas da PUC para o próximo período (disciplinas com horários já definidos), quantas salas de aulas são necessárias?

– Alocação de transporte
– Alocação de registradores por um compilador
– Sudoku
...

(Livro "A Guide to Graph Coloring", Lewis)

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Resp: 2

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Resp: 2

Pergunta: Qual é o número cromático de um grafo bipartido?

Coloração

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número ímpar de nós?

Resp: 3

Pergunta: Qual é o número cromático de um ciclo com número par de nós?

Resp: 2

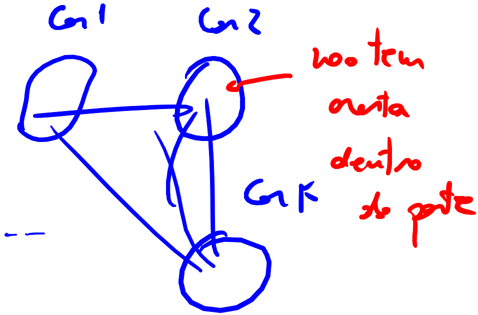
Pergunta: Qual é o número cromático de um grafo bipartido?

Resp: 2

Número cromático $\chi(G) = k \equiv G$ é *k-partido*

k-part $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq k$ ✓

$\chi(G) = k$ $\Rightarrow$ k-part



Cotas superiores: Certamente $\chi(G) \leq \#$ nós

Coloração

Cotas superiores: Certamente $\chi(G) \leq \#$ nós

Mas intuitivamente, se o grafo tem poucas arestas o número cromático deve ser pequeno

Coloração

Cotas superiores: Certamente $\chi(G) \leq \#$ nós

Mas intuitivamente, se o grafo tem poucas arestas o número cromático deve ser pequeno

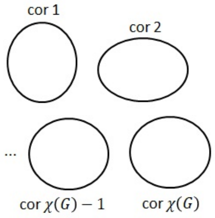
Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

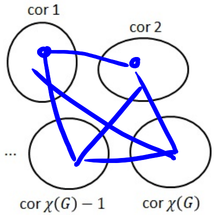
Prova: Considere uma coloração de G com $\chi(G)$ cores



Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

Prova: Considere uma coloração de G com $\chi(G)$ cores

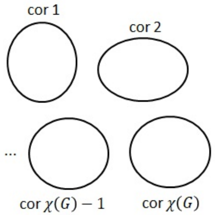


Pra cada par de cores diferentes, tem pelo menos uma aresta conectando essas cores, senão dava para reduzir o número de cores

Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

Prova: Considere uma coloração de G com $\chi(G)$ cores



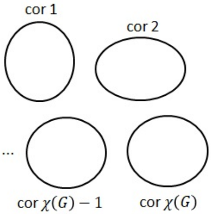
Pra cada par de cores diferentes, tem pelo menos uma aresta conectando essas cores, senão dava para reduzir o número de cores

Então **#arestas** $\geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$

Proposição

Pra todo grafo, $\chi(G) \leq \sqrt{2 \cdot \#arestas + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

Prova: Considere uma coloração de G com $\chi(G)$ cores



Pra cada par de cores diferentes, tem pelo menos uma aresta conectando essas cores, senão dava para reduzir o número de cores

Então $\mathbf{\#arestas} \geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$

Ou seja, $\mathbf{\#arestas} \gtrsim \frac{\chi(G)^2}{2} \Rightarrow \chi(G) \lesssim \sqrt{2 \cdot \mathbf{\#arestas}}$ $\square$

Coloração

Além disso, se os graus dos nós de G são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

Coloração

Além disso, se os graus dos nós de G são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

Proposição

Para qualquer grafo simples G, $\chi(G) \leq \textit{maior grau} + 1$

Prova: Por indução no número de vértices

Coloração

Além disso, se os graus dos nós de G são pequenos, o número cromático também deve ser pequeno

Proposição

Para qualquer grafo simples G, $\chi(G) \leq$ maior grau $+ 1$

Prova: Por indução no número de vértices

Caso base: 0 vértices, ok $\chi(G) = 0 \leq 0 + 1$

Proposição

Para qualquer grafo simples G, $\chi(G) \leq$ *maior grau* $+ 1$

Prova: Por indução no número de nós

Proposição

Para qualquer grafo simples G, $\chi(G) \leq \textit{maior grau} + 1$

Prova: Por indução no número de nós

Caso base: 0 vértices, ok

Proposição

Para qualquer grafo simples G, $\chi(G) \leq$ maior grau $+ 1$

Prova: Por indução no número de nós

Caso base: 0 vértices, ok

Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para para todo grafo com n nós

Proposição

Para qualquer grafo simples G, $\chi(G) \leq$ maior grau $+ 1$

Prova: Por indução no número de nós

Caso base: 0 vértices, ok

Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para para todo grafo com n nós

Considere grafo G com $n + 1$ nós. Considere um nó qualquer v de G

Proposição

Para qualquer grafo simples G, $\chi(G) \leq$ *maior grau* $+ 1$

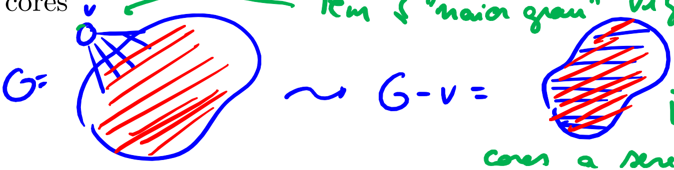
Prova: Por indução no número de nós

Caso base: 0 vértices, ok

Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para para todo grafo com n nós

Considere grafo G com $n+1$ nós. Considere um nó qualquer v de G

Usando a **hipótese indutiva**, colora $G - v$ com [maior grau $+ 1$] cores



tem ≤ "maior grau" vizinhos, mas tenho [maior grau + 1] cores a serem usadas

⟹ tem cor que não foi usada em algum vizinho

Proposição

Para qualquer grafo simples G, $\chi(G) \leq$ maior grau $+ 1$

Prova: Por indução no número de nós

Caso base: 0 vértices, ok

Passo indutivo: Suponha que a proposição vale para para todo grafo com n nós

Considere grafo G com $n + 1$ nós. Considere um nó qualquer v de G

Usando a **hipótese indutiva**, colora $G - v$ com $\leq$ [maior grau $+ 1$] cores

Como v tem no máximo [maior grau] vizinhos, uma dessas cores não aparece em algum vizinho de v

$\Rightarrow$ use essa cor em v para obter uma coloração do grafo G total

Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

Vamos caracterizar grafos bipartidos

Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

Vamos caracterizar grafos bipartidos

Proposição

Todo ciclo ímpar tem número cromático 3

Prova: Exercício

Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

Vamos caracterizar grafos bipartidos

Proposição

Todo ciclo ímpar tem número cromático 3

Então temos a seguinte consequência:

Proposição

Considere um grafo G. Se ele tem ciclo ímpar, então G não é bipartido

Coloração

Lembre que grafos bipartidos (ou com número cromático 2) são importantes em emparelhamentos

Vamos caracterizar grafos bipartidos

Proposição

Todo ciclo ímpar tem número cromático 3

Então temos a seguinte consequência:

Proposição

Considere um grafo G. Se ele tem ciclo ímpar, então G não é bipartido

Prova: Se não tem como colorir o ciclo de G com 2 cores, então não tem como colorir G com 2 cores

Tem também o inverso

Proposição

Se G não tem ciclo impar, então G é bipartido

Tem também o inverso

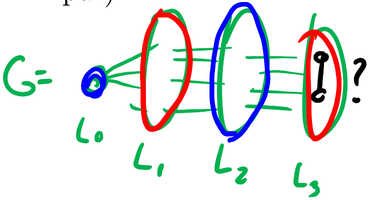
Proposição

Se G não tem ciclo impar, então G é bipartido

Prova: Considere um nó s qualquer. Seja L_i o conjunto de nós com distância i de s

Pinte as "camadas" L_i de forma alternada com 2 cores: L_0 azul, L_1 vermelho, L_2 azul, etc.
(ou seja, pra i par pinte de azul, pra i impar pinte de vermelho)

Precisamos mostrar é coloração, ou seja, não existe aresta com ambas as pontas azul (camada par) ou ambas as pontas vermelho (camada impar)



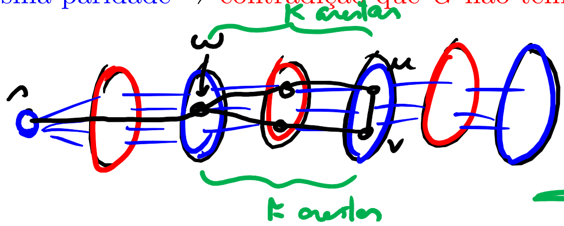
Vamos mostrar que não tem aresta azul/azul
(o caso vermelho/vermelho é idêntico)

Por contradição, suponha que tenha aresta entre nós $u \in L_i$ e $v \in L_j$ onde i e j são par (azul)

Considere o caminho mais curto de s a u, e de s a v. Seja w o último nó comum nesses caminhos

$\Rightarrow$ temos o ciclo $w \rightsquigarrow u - v \rightsquigarrow w$

Além disso, esse ciclo é impar: os caminhos $w \rightsquigarrow u$ e $v \rightsquigarrow w$ tem a mesma paridade $\Rightarrow$ contradição que G não tem ciclo impar



⇒ ciclo tem 2K+1 arestas
⇒ impar! ▨

Coloração

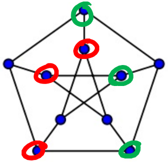
Juntas essas proposições dão a seguinte caracterização de grafos bipartidos:

Teorema

G é bipartido se e somente se não tem ciclo impar

Exercícios

Exercício 1: Encontre o número cromático do grafo abaixo



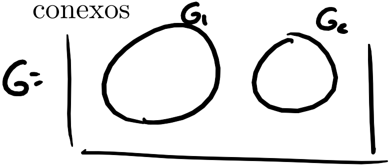
$\chi(G) = 3$

Exercício 2: O que acontece com o número cromático quando adicionamos uma aresta? E quando removemos uma aresta?

Pode descer ou ficar igual

Pode subir ou ficar igual

Exercício 3: Considere um grafo G com 2 componentes conexos. Relacione o número cromático de G com o de seus componentes conexos



$\chi(G) = \text{MAX}\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$

**
Exercício 4: Dado grafo, um *conjunto independente* é um conjunto de nós que não tem nenhuma aresta entre eles

Considere um grafo G com 100 nós cujo maior conjunto independente tem tamanho 25. O número cromático de G pode ser 3? Não!

$\chi(G) =$ partição dos nós em menor número de conj. indep.