Estruturas Discretas 2017.2

Marco Molinaro

Conteúdo

1. Tipos de Demonstração
   - Generalidades em provas
   - Exemplos e Contra-Exemplos
   - Demonstração por Força Bruta
   - Prova Direta
   - Prova Construtiva
   - Prova por Contradição

Tipos de Demonstração

Cuidado

Cuidado: Considere a seguinte proposicao

Proposição

Para todo número inteiro n, $2n^3 - 3n^2 + n$ *é divisivel por 6.*

Cuidado

Cuidado: Considere a seguinte proposicao

Proposição

Para todo número inteiro n, $2n^3 - 3n^2 + n$ *é divisivel por 6.*

Pergunta: Se escrevermos uma demonstração que assume que n é **par**, isso basta pra provar a proposicao?

Cuidado

Cuidado: Considere a seguinte proposicao

Proposição

Para todo número inteiro n, $2n^3 - 3n^2 + n$ é divisivel por 6.

Pergunta: Se escrevermos uma demonstração que assume que n é **par**, isso basta pra provar a proposicao?

Nao. Temos que provar para **todo** n, ou equivalentemente, para um n **generico** (isto é, sem assumir propriedade especial).

Cuidado

Cuidado: Considere a seguinte proposicao

Proposição

Para todo número inteiro n, $2n^3 - 3n^2 + n$ é divisivel por 6.

Pergunta: Se escrevermos uma demonstração que assume que n é **par**, isso basta pra provar a proposicao?

Nao. Temos que provar para **todo** n, ou equivalentemente, para um n **generico** (isto é, sem assumir propriedade especial).

Nao pode usa propriedade que nao esta na hipotese (a hipotese neste caso é que o objeto é um *número inteiro*)

Cuidado

Cuidado: Considere a seguinte proposicao

Proposição

Para todo número inteiro n, $2n^3 - 3n^2 + n$ é divisivel por 6.

Pergunta: Se escrevermos uma demonstração que assume que n é **par**, isso basta pra provar a proposicao?

Nao. Temos que provar para **todo** n, ou equivalentemente, para um n **generico** (isto é, sem assumir propriedade especial).

Nao pode usa propriedade que nao esta na hipotese (a hipotese neste caso é que o objeto é um *número inteiro*)

Em particular, nao basta verificar a proposicao para **1** exemplo

Exemplos e Contra-Exemplos

Quando a proposição é começa com o quantificador **existe**, ai sim podemos prová-la exibindo 1 so exemplo.

Exemplos e Contra-Exemplos

Quando a proposição é começa com o quantificador **existe**, ai sim podemos prová-la exibindo 1 so exemplo.

Proposição

$\exists$ *n inteiro tal que* $n^2 + n + 5$ *é um número primo.*

Quando a proposição é começa com o quantificador **existe**, ai sim podemos prová-la exibindo 1 so exemplo.

Proposição

$\exists$ n *inteiro tal que* $n^2 + n + 5$ *é um número primo.*

Prova: O número inteiro $n = 1$ tem a propriedade desejada: $1^2 + 1 + 5 = 7$ é primo.

Exemplos e Contra-Exemplos

Contra-exemplo: Quando a proposição começa com o quantificador **todo**, podemos **desprova-la** mostrando um exemplo que **nao** satisfaz a propriedade exigida

Exemplos e Contra-Exemplos

Contra-exemplo: Quando a proposição começa com o quantificador **todo**, podemos **desprova-la** mostrando um exemplo que **nao** satisfaz a propriedade exigida

Proposição

Nenhum número primo é par.

Prova que é falso: O número primo 2 é par.

Exemplos e Contra-exemplos

Pergunta: Porque podemos utilizar 1 exemplo para **provar** uma proposicao do tipo **existe**, e **desprovar** uma proposicao do tipo **todo**?

Exemplos e Contra-exemplos

Pergunta: Porque podemos utilizar 1 exemplo para **provar** uma proposicao do tipo **existe**, e **desprovar** uma proposicao do tipo **todo**?

Resposta: Negacao.

$$
\begin{aligned}
& \text{Mostrar que } [\forall x \;\; \textit{expressao}(x)] \text{ é } \textbf{falsa} \\
\equiv\; & \text{Mostrar que sua } \textbf{negação } \neg[\forall x \;\; \textit{expressao}(x)] \text{ é } \textbf{verdadeira} \\
\equiv\; & \text{Mostrar que } [\exists x \;\; \neg\textit{expressao}(x)] \text{ é } \textbf{verdadeira}
\end{aligned}
$$

Demonstração por Força Bruta

Força bruta: Testa todos os casos.

Demonstração por Força Bruta

Força bruta: Testa todos os casos.

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 *e menor que* 20*, pode ser escrito como a soma de dois primos.*

Demonstração por Força Bruta

Força bruta: Testa todos os casos.

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 e menor que 20, pode ser escrito como a soma de dois primos.

Prova: Basta resolver para todos os casos:

$4=2+2$	$10=7+3$	$16=11+5$
$6=3+3$	$12=7+5$	$18=13+5$
$8=5+3$	$14=7+7$	

Demonstração por Força Bruta

Se no entanto modificarmos a proposição anterior para:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 *e menor que* 100.000 *pode ser escrito como a soma de* 2 *primos.*

Demonstração por Força Bruta

Se no entanto modificarmos a proposição anterior para:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 *e menor que* 100.000 *pode ser escrito como a soma de* 2 *primos.*

Prova: Utilizando-se um computador para gerar todas as possibilidades, procede-se de forma análoga à anterior.

Demonstração por Força Bruta

Se, no entanto, quisermos provar a proposição geral:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de 2 primos.

Demonstração por Força Bruta

Se, no entanto, quisermos provar a proposição geral:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 *pode ser escrito como a soma de* 2 *primos.*

Não podemos usar força bruta pois o conjunto é **infinito**

Demonstração por Força Bruta

Se, no entanto, quisermos provar a proposição geral:

Proposição

Todo número par maior ou igual a 4 *pode ser escrito como a soma de* 2 *primos.*

Não podemos usar força bruta pois o conjunto é **infinito**

Esse problema está em **aberto**: *Conjectura de Goldbach.*

Demonstração por Prova Direta

Prova direta: encadeamento de argumentos lógicos a partir da **hipótese**, usando **coisas conhecidas** (axiomas, definições, ou outros teoremas (já provados))

Demonstração por Prova Direta

Definição

*Um número inteiro n é **multiplo** de um número inteiro k se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k \cdot m$*

Demonstração por Prova Direta

Definição

*Um número inteiro n é **multiplo** de um número inteiro k se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k \cdot m$*

Proposição

A soma de 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3.

Prova:

- Sejam $x, x+1, x+2$ quaisquer 3 números inteiros consecutivos

Demonstração por Prova Direta

Definição

*Um número inteiro n é **multiplo** de um número inteiro k se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k \cdot m$*

Proposição

A soma de 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3.

Prova:

- Sejam $x, x+1, x+2$ quaisquer 3 números inteiros consecutivos
- Sua soma é $S = x + (x+1) + (x+2)$. Logo:

Demonstração por Prova Direta

Definição

Um número inteiro n é ***multiplo*** *de um número inteiro k se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k \cdot m$*

Proposição

A soma de 3 números inteiros consecutivos é múltiplo de 3.

Prova:

- Sejam $x, x+1, x+2$ quaisquer 3 números inteiros consecutivos
- Sua soma é $S = x + (x+1) + (x+2)$. Logo:

$$S = x + (x+1) + (x+2) \Rightarrow$$
$$S = 3x + 3 \Rightarrow$$
$$S = 3(x+1) \Rightarrow$$
$$\text{existe } m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } S = 3m \Rightarrow$$
$$S \text{ é múltiplo de } 3$$

Demonstração por Prova Direta

Teorema

Considere 6 pontos distintos no plano $v_1, v_2, \ldots, v_6$. Mostre que ***toda*** *maneira de colorir os segmentos de retas entre esse pontos, utilizando as cores azul ou branca, produz pelo menos um triângulo cujos lados tem a mesma cor.*

Demonstração por Prova Direta

Prova: Considere uma coloração dos segmentos ligando os pontos

Demonstração por Prova Direta

Prova: Considere uma coloração dos segmentos ligando os pontos

Como tem cinco segmentos de reta conectando v_1 aos outros pontos então podemos, e só **2 cores**, concluimos que **pelo menos** três deles tem a mesma cor.

Demonstração por Prova Direta

Prova: Considere uma coloração dos segmentos ligando os pontos

Como tem cinco segmentos de reta conectando v_1 aos outros pontos então podemos, e só **2 cores**, concluimos que **pelo menos** três deles tem a mesma cor.

Chame essa cor de COR (azul ou branca)

Demonstração por Prova Direta

Prova: Considere uma coloração dos segmentos ligando os pontos

Como tem cinco segmentos de reta conectando v_1 aos outros pontos então podemos, e só **2 cores**, concluimos que **pelo menos** três deles tem a mesma cor.

Chame essa cor de COR (azul ou branca)

Sejam então A, B, C vértices que estão ligados a v_1 com a cor COR.

Demonstração por Prova Direta

Prova: Considere uma coloração dos segmentos ligando os pontos

Como tem cinco segmentos de reta conectando v_1 aos outros pontos então podemos, e só **2 cores**, concluimos que **pelo menos** três deles tem a mesma cor.

Chame essa cor de COR (azul ou branca)

Sejam então A, B, C vértices que estão ligados a v_1 com a cor COR.

Caso 1) **Pelo menos** um dos segmentos de reta $\overline{AB}, \overline{AC}$ ou $\overline{BC}$ é tem cor COR. Logo, formaremos um triângulo de cor COR. Por exemplo, se $\overline{AB}$ for azul então o triângulo com vértices v_1, A, B é de cor COR.

Demonstração por Prova Direta

Prova: Considere uma coloração dos segmentos ligando os pontos

Como tem cinco segmentos de reta conectando v_1 aos outros pontos então podemos, e só **2 cores**, concluimos que **pelo menos** três deles tem a mesma cor.

Chame essa cor de COR (azul ou branca)

Sejam então A, B, C vértices que estão ligados a v_1 com a cor COR.

Caso 1) **Pelo menos** um dos segmentos de reta $\overline{AB}, \overline{AC}$ ou $\overline{BC}$ é tem cor COR. Logo, formaremos um triângulo de cor COR. Por exemplo, se $\overline{AB}$ for azul então o triângulo com vértices v_1, A, B é de cor COR.

Caso 2) $\overline{AB}, \overline{AC}$ **e** $\overline{BC}$ nao tem cor COR. Entao o triângulo com vértices A, B, C é tem a cor que nao COR.

Prova Construtiva

Prova construtiva: Apresenta um método que constroi o objeto do qual a proposicao trata

Prova Construtiva

Prova construtiva: Apresenta um método que constroi o objeto do qual a proposicao trata

Extensao do metodo de apresentar **1 exemplo**: podemos "construir" conjunto infinito de objetos

Teorema

Existem infinitas triplas (x, y, z) *de números inteiros tais que* $x^2 + y^2 = z^2$

Prova Construtiva

Prova: Podemos verificar facilmente que $(3, 4, 5)$ satisfaz o teorema, já que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Tentaremos agora verificar se as triplas da forma $(3k, 4k, 5k)$, com $k \in Z$, também satisfazem. Temos que:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = 4^2k^2 + 3^2k^2 = (3^2 + 4^2)k^2 = 5^2k^2 = (5k)^2$$

Logo as triplas da forma $(3k, 4k, 5k)$ satisfazem o teorema. Como $k \in Z$ e existem infinitos números inteiros, provamos que o conjunto construído pela lei de formação acima é infinito.

Prova Construtiva

Teorema

A série harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

é divergente.

Prova: Dado um M genérico, devemos apresentar uma forma de construir n, como função de M, tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > M$$

Dessa maneira, estaremos mostrando que a série é maior que qualquer valor apresentado.
Seja $n = 2^{2M}$, temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{i} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{i} + \ldots + \sum_{i=n/2+1}^{n} \frac{1}{i} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{2M \text{ vezes}} = M$$

Na expressão acima utilizamos o fato de que:

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} > 2^k \left(\frac{1}{2^{k+1}} \right) = \frac{1}{2}$$

Prova por Contradição

Próximo aula...

Exercicios

Definição

*Um número inteiro n é **par** se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$*

Definição

*Um número inteiro n é **impar** se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$*

Exercicio: Prove as proposições abaixo

1. Para todo inteiro par n, n^2 é par
2. Para todo inteiro impar x e todo inteiro impar y, xy é impar
3. Para todo inteiro n, $n(n+1)$ é par