Caminho mais Curto

Caminho mais curto

Como *Google Maps* encontra o melhor caminho até o meu destino?

Como pacotes são roteados na internet até o destino?

Caminho mais curto

Como *Google Maps* encontra o melhor caminho até o meu destino?

Como pacotes são roteados na internet até o destino?

...

Caminho mais curto

Como *Google Maps* encontra o melhor caminho até o meu destino?

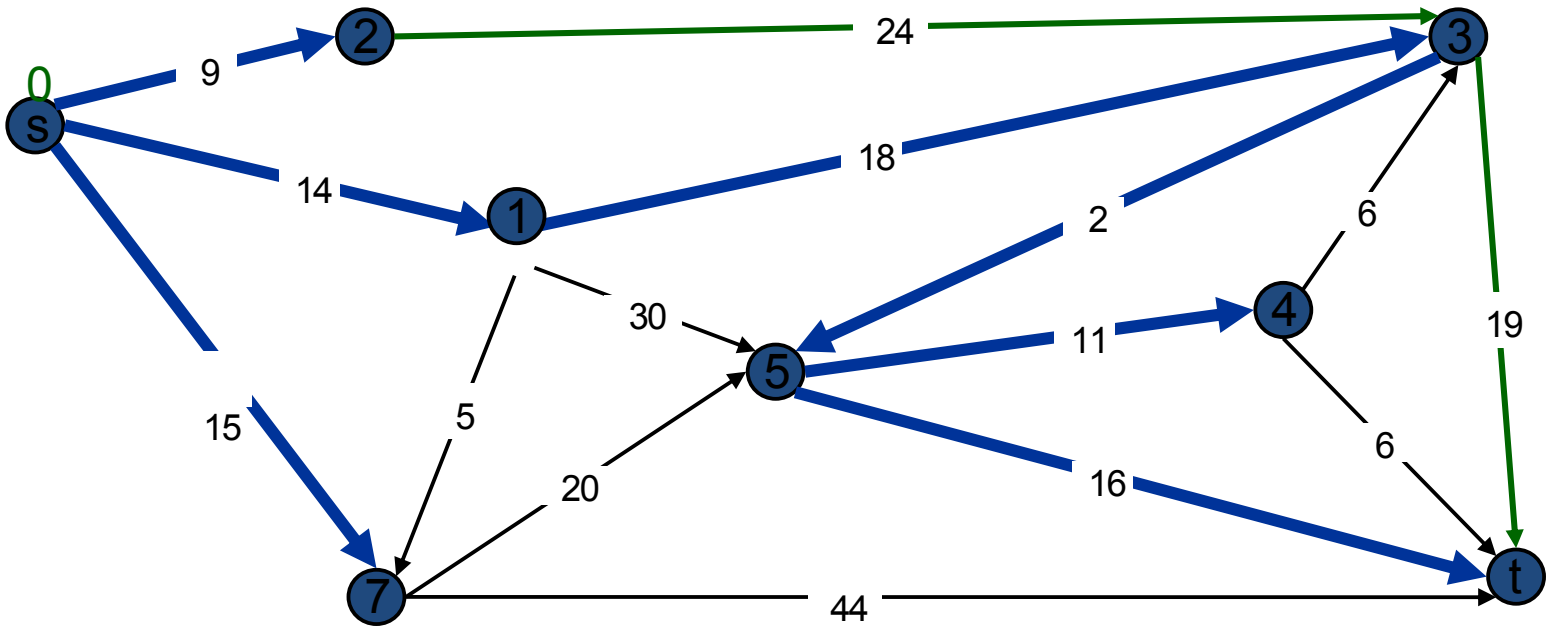
Como pacotes são roteados na internet até o destino?

...

Problemas de caminho mais curto em grafos:

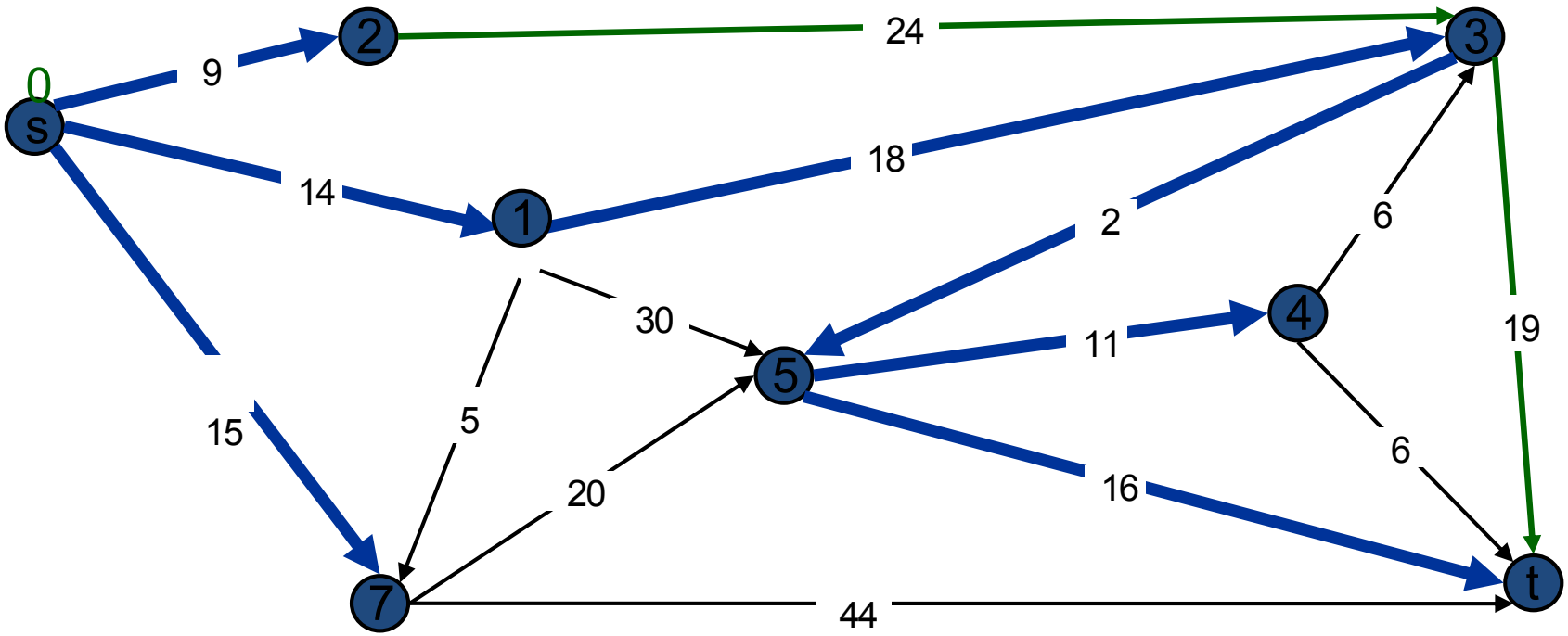
Vamos considerar grafos direcionados onde cada aresta e tem um comprimento $w(e)$ **positivo**

O comprimento de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas



Caminho mais curto

Problema de Caminho mais curto: Dado um grafo direcionado com comprimentos positivos nas arestas, origem s e destino t, encontre um menor caminho de s a t.



Caminho mais curto

Pergunta: Algoritmo?

Caminho mais curto

Pergunta: Algoritmo?

Uma possibilidade é força bruta: gerar todos os caminhos entre s e t e selecionar o de menor peso

Problema: Muito cara computacionalmente, o número de caminhos pode ser exponencial no número de vértices do grafo

Vamos desenvolver um algoritmo muito mais eficiente

Caminho mais curto

Começamos com a seguinte observação

Lema

Seja P o menor caminho de u a v, e seja w um vértice de P. O subcaminho de P $u \rightsquigarrow w$ é o caminho mais curto entre u e w.

Caminho mais curto

Começamos com a seguinte observação

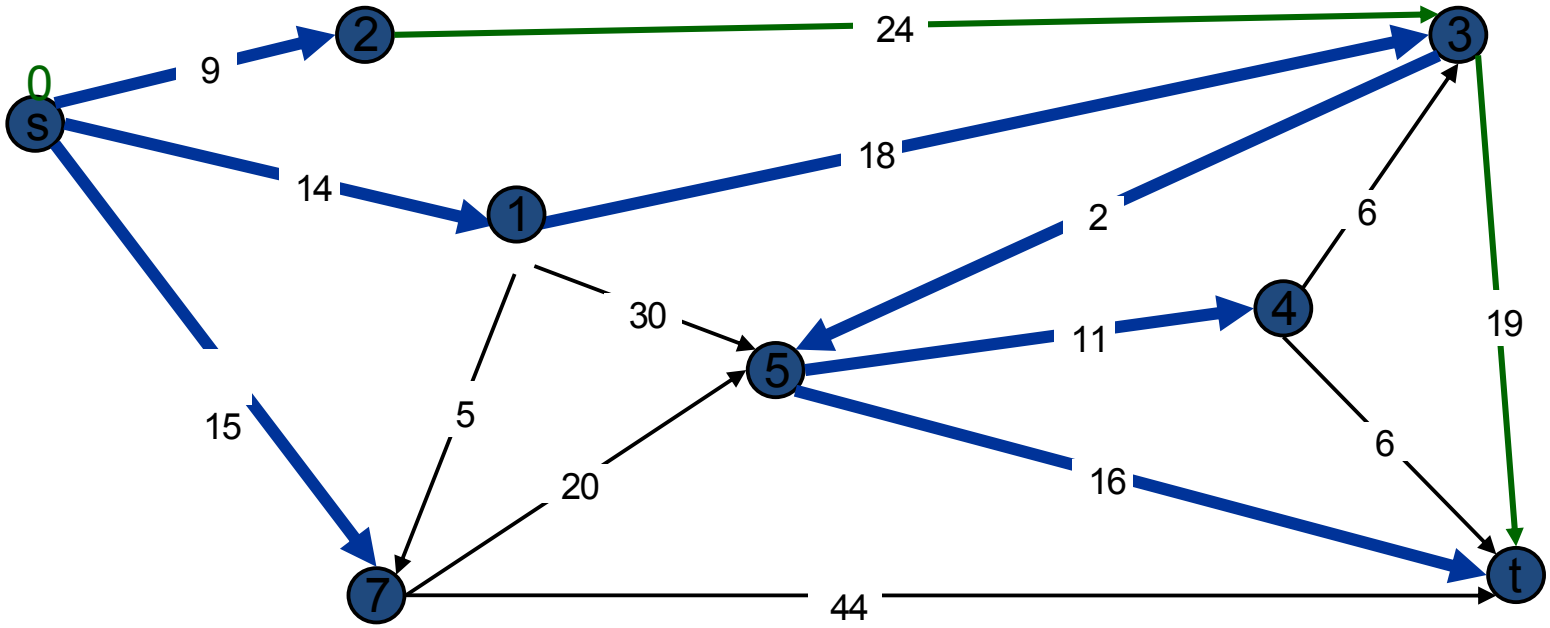
Lema

Seja P o menor caminho de u a v, e seja w um vértice de P. O subcaminho de P $u \rightsquigarrow w$ é o caminho mais curto entre u e w.

Prova. Se isso não fosse verdade, poderíamos obter um caminho mais curto que P substituindo o subcaminho de P $u \rightsquigarrow w$ por um menor

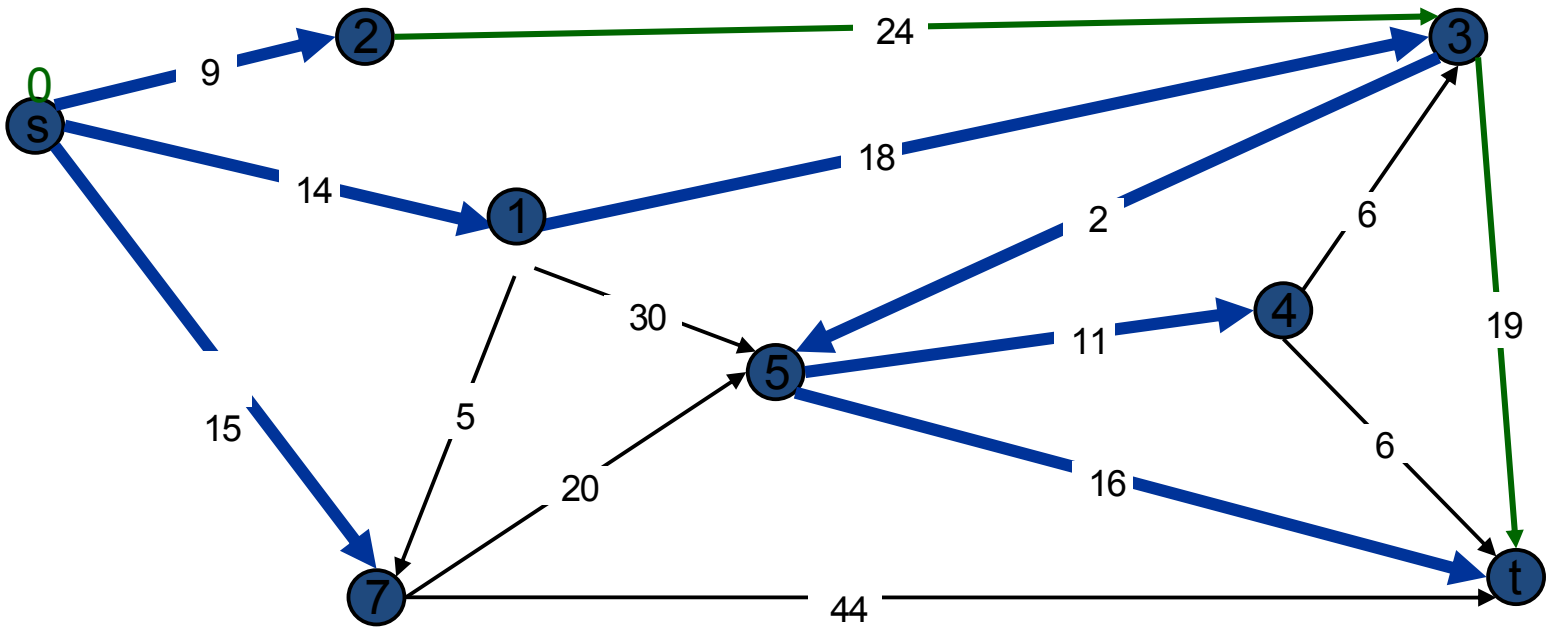
Caminho mais curto

A distância de s a v é o tamanho do caminho mais curto entre eles



Caminho mais curto

A distância de s a v é o tamanho do caminho mais curto entre eles



O nosso algoritmo irá encontrar o caminho mais curto até o vértice mais próximo da origem s, depois o caminho mais curto até o segundo vértice mais próximo da origem s e assim por diante ...

Caminho mais curto

Seja S_k o conjunto dos k vértices mais próximos de s

Caminho mais curto

Seja S_k o conjunto dos k vértices mais próximos de s

Assuma que já conhecemos o caminho mais curto de s a cada um dos vértices em S_{k-1}. Vamos tentar encontrar P_{s,v_k}, o caminho mais curto de s até v_k, onde v_k é o k-ésimo vértice mais próximo de s

Pergunta: Mas quem é v_k?
[desenho]

Caminho mais curto

Sabemos o seguinte sobre v_k

Lema

Seja u o predecessor de v_k no caminho mais curto P_{s,v_k} entre s e v_k. Então $u \in S_{k-1}$

Prova. O subcaminho de P_{s,v_k} $s \rightsquigarrow u$ é menor que o caminho total

Então u está mais próximo de s do que $v_k \Rightarrow u \in S_{k-1}$

Caminho mais curto

Então o caminho mais curto de s a v_k é composto de um caminho mais curto de s a **algum** vértice $u \in S_{k-1}$ e de uma aresta de u a v_k.

Portanto, para encontrar o caminho mais curto de s a v_k consideramos todos os caminhos com a estrutura acima

`EncontraCaminhoPesoMínimo`(s, t)

$S_1 \leftarrow \{s\}$;

For $k = 2$ **to** n

$\mathcal{L} = \emptyset$ //caminhos candidatos a P_{s,v_k}

Para todo vértice $u \in S_{k-1}$

Para todo vértice $v \notin S_{k-1}$ adjacente a u

Inclua o caminho $(P_{s,u} \rightarrow v)$ na lista $\mathcal{L}$ dos caminhos candidatos

Fim Para

Fim Para

$P \leftarrow$ o menor caminho na lista $\mathcal{L}$ dos caminhos candidatos

$v_k \leftarrow$ último vértice do caminho P

$P_{s,v_k} \leftarrow P$

$S_k = S_{k-1} \cup \{v_k\}$

Fim Enquanto

Retorne caminho $P_{s,t}$

Caminho mais curto

Exemplo:

Caminho mais curto

Em *Análise de Algoritmos* veremos uma implementação bastante eficiente desse algoritmo, chamado **Algoritmo de Dijkstra**

Exercícios

Exercício 1: Mostre que o algoritmo acima **não** retorna o caminho mais curto de s a t caso exista aresta com comprimento **negativo**

Exercício 2: Considere um problema diferente: agora os "custos" estão **nos nós**, e **não nas arestas**

O custo de um caminho é a soma dos custos de seus nós.

Nessa situação, como você pode encontra o caminho mais barato de s a t usando um algoritmo de caminho mais curto?

Modelando como caminhos mais curtos

Podemos modelar diversos problemas como problema de caminho mais curto

Exercício 3: Você tem uma pequena empresa de consultoria, com clientes no Rio e São Paulo

Em cada mês você pode escolher basear seu escritório no Rio ou SP (Começa no Rio)

No fim do mês i você decide se mantém o escritório no lugar atual ou muda pra próxima cidade, e paga custo. Os custos estão na tabela abaixo

Você quer decidir aonde o escritório deve estar em cada momento de forma a minimizar o custo total. Modele usando caminho mais curto

movimento	**mes 1**	**mes 2**	**mes 3**	**mes 4**
SP-SP	-	3	20	30
SP-R	-	30	12	14
R-R	50	20	2	4
R-SP	11	33	30	40

Dica: Use um grafo com 4 "colunas" de nós, cada uma com 2 nós