Grafos Direcionados

Grafos Direcionados

Em muitas aplicações, é importante ter direção nas arestas:

– Ruas de mão única

– Grafos modelando páginas da internet e links entre elas

– Grafos modelando pre-requisitos de matérias

– ...

Grafos Direcionados

Em muitas aplicações, é importante ter direção nas arestas:

– Ruas de mão única

– Grafos modelando páginas da internet e links entre elas

– Grafos modelando pre-requisitos de matérias

– ...

Isso motiva grafos direcionados

Grafos Direcionados

Em muitas aplicações, é importante ter direção nas arestas:

- Ruas de mão única
- Grafos modelando páginas da internet e links entre elas
- Grafos modelando pre-requisitos de matérias
- ...

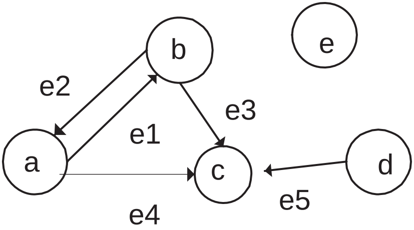
Isso motiva grafos direcionados

Definição

*Um **grafo direcionado** G é um par (V, E) onde*

1) V é um conjunto [nós]
2) E é um conjunto de pares (ordendadas) de nós [arcos ou arestas]

Grafos Direcionados



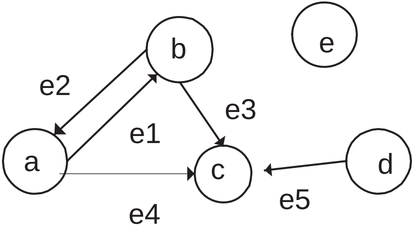
Grafos Direcionados

Definição (Grau de Entrada)

*O **grau de entrada** $d^{-}(v)$ de um vértice v é o número de arcos que chegam/apontam para v*

Definição (Grau de Saída)

*O **grau de saída** $d^{+}(v)$ de um vértice v é o número de arcos que saem de v*



Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?

Grafos Direcionados

Pergunta: Num grafo **direcionado** qual a relação entre a soma dos graus de saída e o número de arestas?

Proposição

*Num grafo **direcionado*** $G = (V, E)$,

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Note que não tem mais o "2" multiplicando o número de arestas

Prova: Por indução no número de arestas. Exercício importante

Grafos Direcionados

Pergunta: E qual a relação entre soma dos graus de saída e soma dos graus de entrada (ainda em grafos **direcionados**)?

Pergunta: E qual a relação entre soma dos graus de saída e soma dos graus de entrada (ainda em grafos **direcionados**)?

Proposição

*Num grafo **direcionado** $G = (V, E)$,*

$$\sum_{v \in V} d^{+}(v) = \sum_{v \in V} d^{-}(v)$$

Prova: Por indução no número de arestas. Exercício importante

Passeios em Grafos Direcionados

Definição (Passeio Direcionado)

Um passeio (walk) em um grafo G é uma sequência não nula $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$, tal que para todo $i = 1, \ldots, k$, a aresta (v_{i-1}, v_i) pertence ao grafo

Definição (Caminho Direcionado)

Um passeio direcionado, onde não há repetição de vértices

Passeios em Grafos Direcionados

Definição (Alcançabilidade)

Um nó u é alcançável a partir de v se e somente se existe um caminho direcionado que começa em v e termina em u.

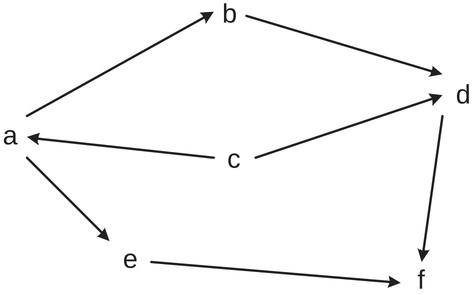


Figure: f é alcançável a partir de b, mas b não é alcançável a partir de f

Passeios em Grafos Direcionados

Pergunta: O que quer dizer um grafo direcionado ser "conexo"?

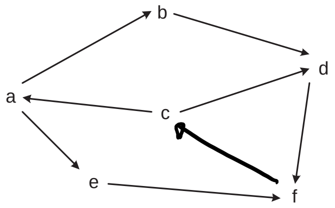
Passeios em Grafos Direcionados

Pergunta: O que quer dizer um grafo direcionado ser "conexo"?

Uma possível definição é a seguinte:

Definição (Grafo Fortemente Conexo)

Um grafo ***direcionado*** $G = (V, E)$, *é* ***fortemente conexo*** *se para todo para* $u, v \in V$, *existe um caminho em* G *de* u *a* v



Passeios em Grafos Direcionados

Grafos fortemente conexos são importantes, pessoas/usuários/etc. não ficam "empacados"

– Caso grafo modele ruas

– Caso grafo modele interface

...

Passeios em Grafos Direcionados

Grafos fortemente conexos são importantes, pessoas/usuários/etc. não ficam "empacados"

– Caso grafo modele ruas

– Caso grafo modele interface

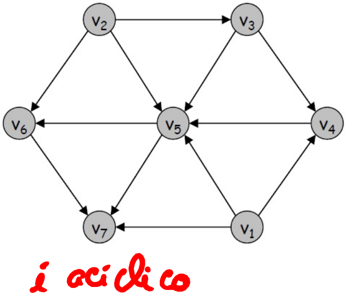
...

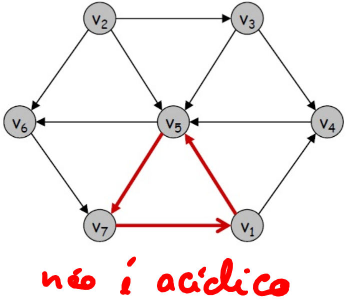
Em *Análise de Algoritmos* vamos ver algoritmos eficientes para detectar se grafo é fortemente conexo ou não (baseado em exercício que faremos hoje)

Grafos Direcionados Acíclicos

Definição

*Um **grafo direcionado acíclico (DAG)** é um grafo direcionado que não contém ciclos*





Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Aonde DAG's aparecem?

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Aonde DAG's aparecem?

Muito usados para modelar relações de precedência: uma tarefa/matéria/etc. tem que ser feita antes de outra

Exemplo: Grafo onde nós são matérias, tem aresta (u, v) se uma matéria u é pré-requisito de matéria u

Grafos Direcionados Acíclicos

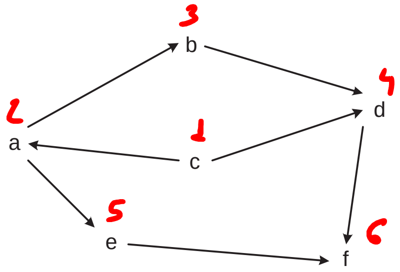
Pergunta: Aonde DAG's aparecem?

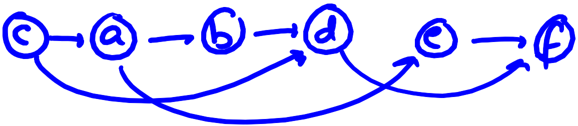
Muito usados para modelar relações de precedência: uma tarefa/matéria/etc. tem que ser feita antes de outra

Exemplo: Grafo onde nós são matérias, tem aresta (u, v) se uma matéria u é pré-requisito de matéria u

Não pode ter ciclo, senão não tem como acabar as matérias

Pergunta: Dado tal grafo de matérias, em que ordem faze-las?





Grafos Direcionados Acíclicos

Tal ordem é chamada ordenação topológica do grafo

Intuitivamente queremos organizar os nós do grafo tal que arestas sempre vão da esquerda pra direita

Grafos Direcionados Acíclicos

Tal ordem é chamada ordenação topológica do grafo

Intuitivamente queremos organizar os nós do grafo tal que arestas sempre vão da esquerda pra direita

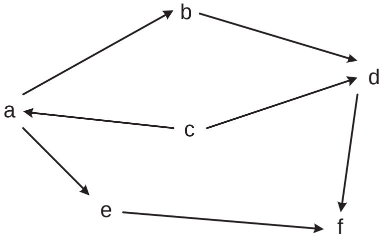
Definição

*Uma **ordenação topológica** de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é uma função f que associa a cada vértice v do grafo um número inteiro $f(v)$ satisfazendo:*

(i) Cada nó recebe valor diferente: $f(u) \neq f(v)$ para $u \neq v$ [posição na ordem]

(ii) Se $(u, v) \in E$ então $f(u) < f(v)$ [arestas da esquerda pra direita]

Grafos Direcionados Acíclicos



Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Todo grafo direcionado tem um ordenação topológica?

Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Todo grafo direcionado tem um ordenação topológica?

Resp: Não

Proposição

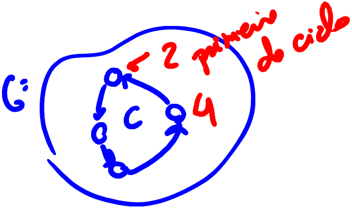
Seja G um grafo direcionado. Se G tem um ciclo, então não tem ordenação topológica

Proof: Por contradição, suponha que G tem ordenação topológica f

Considere um ciclo $C \equiv v_0 v_1 \ldots v_{k-1} v_k = v_0$ um ciclo em G

Seja v_i o nó do ciclo que aparece primeiro na ordenação topológica, ou seja, tem o menor valor $f(v_i)$

Mas como aresta (v_{i-1}, v_i) está no grafo, v_{i-1} tem que vir antes na ordenação top., ou seja $f(v_{i-1}) < f(v_i) \Rightarrow$ contradição □



Grafos Direcionados Acíclicos

Pergunta: Todo grafo direcionado acíclico (DAG) tem ordenação topológica?

Pergunta: Todo grafo direcionado acíclico (DAG) tem ordenação topológica?

Resp: Sim, vamos provar a seguir

Grafos Direcionados Acíclicos

Lema

Em um DAG existe um vértice com grau de entrada 0

Ideia: Caso contrário, pegue um nó e siga para seu "ante-vizinho", e seu "ante-vizinho", etc. $\Rightarrow$ ciclo!

Lema

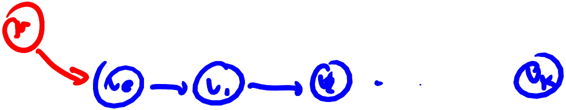
Em um DAG existe um vértice com grau de entrada 0

Prova: Seja $P = v_0 v_1 \ldots v_k$ um maior caminho no grafo. Vamos mostrar que o início v_0 tem grau de entrada 0

Por contradição, assuma que v_0 tem grau de entrada $\geq 1 \Rightarrow$ tem nó u apontando para v_0

Caso u pertença ao caminho P, temos um ciclo $\Rightarrow$ contradição

Caso u não pertença ao caminho P, temos um caminho maior que P $\Rightarrow$ contradição $\square$



Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica

Grafos Direcionados Acíclicos

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica

Prova: Por indução no número de vértices de G

Proposição

Todo DAG G tem ordenação topológica

Prova: Por indução no número de vértices de G

Caso base: G tem apenas um vértice $v \Rightarrow$ ordenação topológica trivial $f(v) = 1$

Passo Indutivo: Considere DAG G com n nós

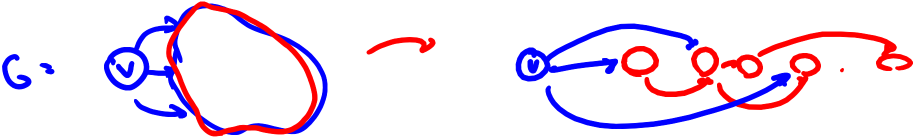
Pela proposição anterior, G tem um nó v com grau de entrada 0

Remova v do grafo, obtendo $G - v$. Como $G - v$ é DAG e tem $n - 1$ nós, pela **hipótese indutiva** tem ordenação topológica f'

Crie uma ordenação topológica para G colocando o nó v na frente, e continuando com a ordenação de $G - v$

(Mais precisamente, defina a ord. top. f para G fazendo $f(v) = 1$ e $f(u) = f'(u) + 1$ para todo $u \neq v$)

Verifique que pra toda aresta (x, y) em G, $f(x) < f(y)$ $\square$



Grafos Direcionados Acíclicos

Ou seja, provamos o seguinte:

Theorem

Um grafo direcionado tem uma ordenação topológica se e somente se ele é acíclico

Grafos Direcionados Acíclicos

A prova do teorema anterior dá algoritmo recursivo para obter uma ordenação topológica para um DAG G

Grafos Direcionados Acíclicos

```
Procedimento OrdemTopologica(G)
```

Se G tem apenas um vértice v

$f(v) = 1$

Senão

Seja v um vértice de grau de entrada 0 em G

$f' \leftarrow \text{OrdemTopologica}(G - v)$

Para todo vértice u de $G - v$

$f(u) \leftarrow f'(u) + 1$

Fim Para

$f(v) \leftarrow 1$

Fim Se

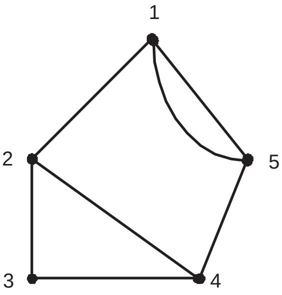
Retorna f

Representações Computacionais

Representações Computacionais

Para poder utilizar os grafos na modelagem e resolução de problemas computacionais, é necessário utilizar estruturas de dados que permitam armazená-los eficientemente em meios digitais.

Seja $G = (V, E)$ um grafo, onde $V = \{1, \ldots, n\}$. A entrada (i, j) de uma matriz de adjacência indica o número de arestas que tem como extremidades i e j.



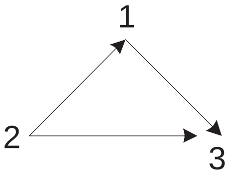
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	2
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	2	0	0	1	0

Matriz de Adjacência – Grafos Não Direcionados

A matriz é simétrica, como podemos observar na Figura. Esta simetria permite guardar somente os elementos da diagonal principal e os elementos abaixo (ou acima) dela. Dessa forma economiza-se espaço no armazenamento da estrutura.

Matriz de Adjacência – Grafos Direcionados

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado, onde $V = \{1, \ldots, n\}$. A entrada (i, j) de uma matriz de adjacência indica o número de arestas que tem i como cauda e j como cabeça. Neste caso, a matriz não é necessariamente simétrica:



	1	2	3
1	0	0	1
2	1	0	1
3	0	0	0

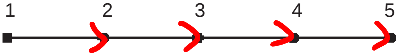
Matriz de Adjacência – Grafos Direcionados

Dentre as propriedades das matrizes de adjacências, destacamos:

- Necessita cerca de n^2 posições de memória.
- A existência de uma aresta pode ser testada com uma única operação.
- Para listar todos os vértices e arestas do grafo precisamos de cerca de n^2 operações.

Lista de Adjacência

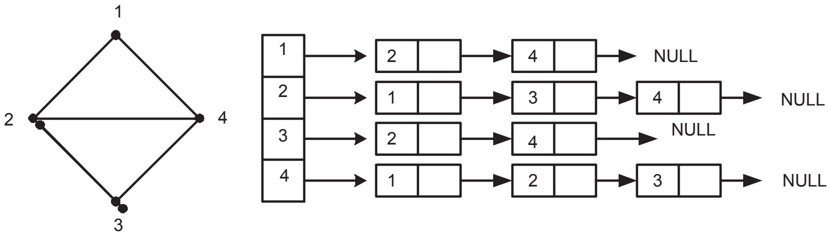
Em muitos casos, lidamos com grafos esparsos, ou seja, com “poucas” arestas. Nesse caso é um desperdício utilizar n^2 posições de memória. A proxima figura mostra um grafo com 5 vértices e 4 arestas, e sua matriz de adjacências. Observe que a maioria das entradas são nulas.



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

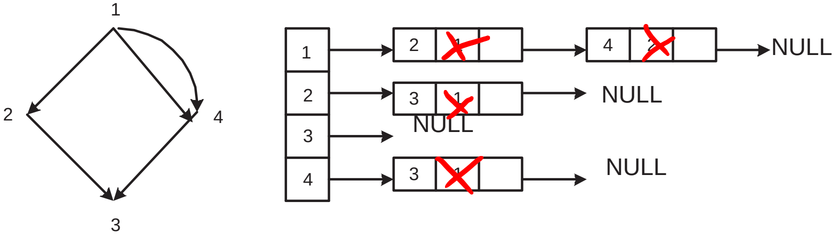
Lista de Adjacência

Uma alternativa para evitar este desperdício, é utilizar um vetor de listas encadeadas, onde a lista correspondente a *i-ésima* posição guarda os elementos adjacentes ao vértice i.



Lista de Adjacência

Para representar arestas paralelas em listas de adjacências, podemos utilizar um campo extra para guardar a multiplicidade da aresta.



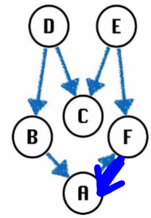
Lista de Adjacência

Dentre as características das listas de adjacências destacamos:

- cerca de $n + |E|$ posições de memória são necessárias.
- Para descobrir se uma aresta pertence ao grafo, pode ser necessário percorrer uma lista encadeada inteira.
- O grafo pode ser percorrido em um tempo proporcional ao número de arestas.

Exercícios

Exercício 1: Quantas ordenações topológicas tem o grafo abaixo:



Exercício 2: Prove: Considere um grafo direcionado G. Se G possui um nó v que alcança todos os outros (ou seja, tem ~~caminho~~ passeio de v a todos outros), e todos nós alcançam v, então o grafo é fortemente conexo

passeio de u a v, $\forall u,v$