Grafos Eulerianos

Grafos Eulerianos

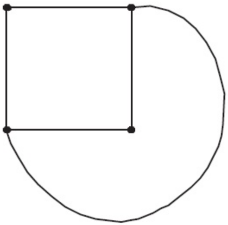
Problema: Todas as ruas de uma cidade tem que ser inspecionadas. Como fazer isso percorrendo a menor distância possível?

Grafos Eulerianos

Problema: Todas as ruas de uma cidade tem que ser inspecionadas. Como fazer isso percorrendo a menor distância possível?

Em linguagem de grafos: Dado um grafo, encontre o menor passeio que cruza cada aresta pelo menos uma vez

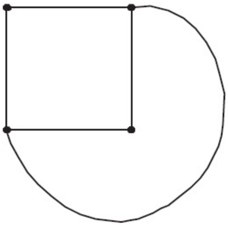
(Problema do Carteiro Chinês)



Problema: Todas as ruas de uma cidade tem que ser inspecionadas. Como fazer isso percorrendo a menor distância possível?

Em linguagem de grafos: Dado um grafo, encontre o menor passeio que cruza cada aresta pelo menos uma vez

(Problema do Carteiro Chinês)



Nesse caso, a melhor solução é passar exatamente 1 vez em cada aresta

Grafos Eulerianos

Definição

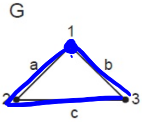
Dado um grafo, um ***trajeto euleriano*** *é um passeio onde cada aresta é visitada exatamente 1 vez*

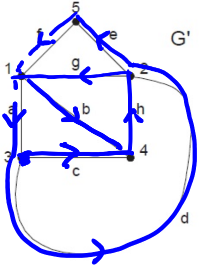
Grafos Eulerianos

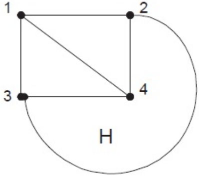
Definição

*Dado um grafo, um **trajeto euleriano** é um passeio onde cada aresta é visitada exatamente 1 vez*

Ex:







← Não tem traj. euleriano

Perguntas: Quando um grafo possui trajeto euleriano?
Algoritmo para encontrar trajeto euleriano, caso exista?

Proposição

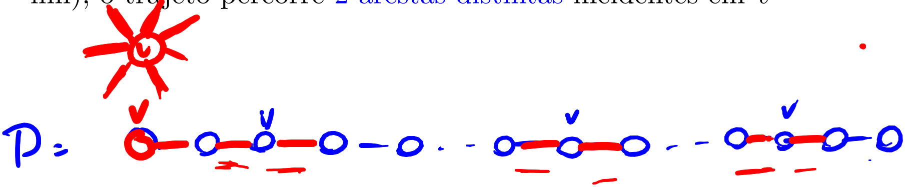
Considere um grafo G com um trajeto euleriano. Se o grafo possui um vértice v com grau impar, então o trajeto euleriano começa ou termina em v

Proposição

Considere um grafo G com um trajeto euleriano. Se o grafo possui um vértice v com grau impar, então o trajeto euleriano começa ou termina em v

Prova: Considere o trajeto euleriano P (cada aresta aparece exatamente 1 vez). Veja as posições aonde o nó v aparece em P:

Em cada vez que ele aparece no "meio" do trajeto P (não no início ou fim), o trajeto percorre 2 arestas distintas incidentes em v



Se v só aparece no "meio" do trajeto, o trajeto cobriria um número par de arestas incidentes em $v \Rightarrow$ ficaria faltando alguma aresta

Portanto, v precisa aparecer no início ou no fim do trajeto $\square$

Grafos Eulerianos

Como consequência temos o seguinte:

Proposição

Se G tem trajeto euleriano, então possui 0 ou 2 nós de grau ímpar

Grafos Eulerianos

Como consequência temos o seguinte:

Proposição

Se G tem trajeto euleriano, então possui 0 ou 2 nós de grau ímpar

Prova: Não pode ter mais do que 2 nós de grau ímpar, pois pela proposição anterior esses nós tem que pertencer ao início/fim do trajeto euleriano

Grafos Eulerianos

Como consequência temos o seguinte:

Proposição

Se G tem trajeto euleriano, então possui 0 ou 2 nós de grau ímpar

Prova: Não pode ter mais do que 2 nós de grau ímpar, pois pela proposição anterior esses nós tem que pertencer ao início/fim do trajeto euleriano

Pelo lema do “Handshaking” que provamos anteriormente, qualquer grafo tem número par de nós de grau ímpar $\Rightarrow$ não pode ter 1 nó de grau impar $\square$

Grafos Eulerianos

Pergunta: Se eu der um grafo G com 0 ou 2 nós de grau ímpar, você pode garantir que tem trajeto euleriano?

Grafos Eulerianos

Pergunta: Se eu der um grafo G com 0 ou 2 nós de grau ímpar, você pode garantir que tem trajeto euleriano?

Resp: Sim! (Desde que seja conexo)

Teorema

Todo grafo G conexo com 0 ou 2 nós de grau impar tem trajeto euleriano

Grafos Eulerianos

Pergunta: Se eu der um grafo G com 0 ou 2 nós de grau ímpar, você pode garantir que tem trajeto euleriano?

Assuma não tem.

Resp: Sim! (Desde que seja conexo)

laço

Teorema

Todo grafo G conexo com 0 ou 2 nós de grau impar tem trajeto euleriano

Ou seja, o grafo conexo tem trajeto euleriano se e somente se tem 0 ou 2 nós de grau ímpar

Vamos provar a primeira metade desse teorema:

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Vamos provar a primeira metade desse teorema:

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Vamos provar a primeira metade desse teorema:

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Caso base: G tem 0 arestas: pra ser conexo só pode ter 1 nó. Trajeto euleriano trivial, não tem aresta pra visitar!

Vamos provar a primeira metade desse teorema:

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Caso base: G tem 0 arestas: pra ser conexo só pode ter 1 nó. Trajeto euleriano trivial, não tem aresta pra visitar!

Passo indutivo: Suponha que resultado vale pra todo grafo com $< m$ arestas. Vamos provar pra grafo G com m arestas

Vamos provar a primeira metade desse teorema:

Proposição

Todo grafo G conexo com 0 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano fechado (começa e termina no mesmo nó)

Prova: Por indução forte no número de arestas

Caso base: G tem 0 arestas: pra ser conexo só pode ter 1 nó. Trajeto euleriano trivial, não tem aresta pra visitar!

Passo indutivo: Suponha que resultado vale pra todo grafo com $< m$ arestas. Vamos provar pra grafo G com m arestas

Como todos os nós tem grau par e G é conexo, todos os nós tem grau pelo menos 2

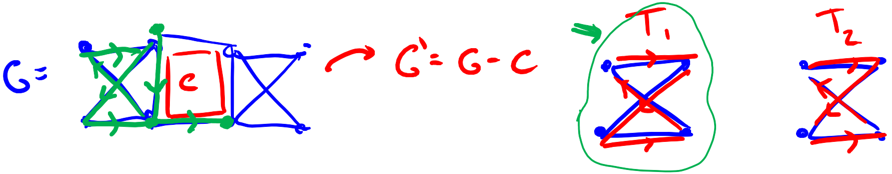
$\Rightarrow$ tem ciclo C (já provamos isso)

Remova esse ciclo C do grafo, obtendo grafo G' [exemplo concreto]

Assim como em G, todos os nós tem grau par em G': quando removemos ciclo C, retiramos 0 ou 2 arestas de cada nó

Sejam $G'_1, G'_2, \ldots$ os componentes conexos de G'

Cada componente conexo tem $< m$ arestas (e só grau par) $\Rightarrow$ pela **hipótese indutiva** componente G'_i tem trajeto euleriano fechado P_i



Podemos montar um trajeto euleriano para o grafo original G da seguinte forma:

1) Caminhe no ciclo C começando em qualquer nó

2) Ao encontrar um nó v de um componente G_i' que ainda não foi percorrido, percorra-o usando seu trajeto euleriano T_i, iniciando e terminando em v

3) Prossiga caminhando em C, repetindo o processo

$\square$

Grafos Eulerianos

Agora trataremos o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Agora trataremos o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: (Redução pro caso com 0 nós de grau ímpar)

Agora trataremos o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: (Redução pro caso com 0 nós de grau ímpar)

Sejam u e v os nós de grau impar. Adicione aresta (u, v) a G, obtendo o grafo G' (pode não ser simples, não tem problema)

Grafos Eulerianos

Agora trataremos o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: (Redução pro caso com 0 nós de grau ímpar)

Sejam u e v os nós de grau impar. Adicione aresta (u, v) a G, obtendo o grafo G' (pode não ser simples, não tem problema)

Agora todos os nós tem grau par

Grafos Eulerianos

Agora trataremos o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: (Redução pro caso com 0 nós de grau ímpar)

Sejam u e v os nós de grau impar. Adicione aresta (u, v) a G, obtendo o grafo G' (pode não ser simples, não tem problema)

Agora todos os nós tem grau par

Pela proposição anterior, G' tem trajeto euleriano fechado P'

Grafos Eulerianos

Agora trataremos o caso com 2 nós de grau impar

Proposição

Todo grafo conexo com 2 nós de grau ímpar tem trajeto euleriano

Prova: (Redução pro caso com 0 nós de grau ímpar)

Sejam u e v os nós de grau impar. Adicione aresta (u, v) a G, obtendo o grafo G' (pode não ser simples, não tem problema)

Agora todos os nós tem grau par

Pela proposição anterior, G' tem trajeto euleriano fechado P'

Removendo aresta (u, v) que adicionamos de P' obtemos trajeto euleriano para G que começa em u e termina em v $\square$

Grafos eulerianos

Então provamos a seguinte caracterização de grafos com trajeto euleriano:

Teorema

Um grafo tem trajeto euleriano se e somente se tem 0 ou 2 nós de grau ímpar

Exercícios

Exercício 1: Diga se os grafos abaixo tem ou não trajeto euleriano, e se tiver encontre-o

Exercício 2: Se possível, desenhe um grafo euleriano com um número par de vértices e ímpar de arestas; se não for possível, explique porque não há tal grafo

Exercício 3: Baseado nas provas acima, descreva **com palavras e em muito alto nível** um procedimento para se encontrar um **ciclo euleriano** caso exista.