Grafos

Isomorfismo de Grafos

Grafos são **isomorficos** se são "idênticos a não ser pelos nomes dos nós"

Isomorfismo de Grafos

Grafos são **isomorficos** se são "idênticos a não ser pelos nomes dos nós"

Mais formalmente, existe bijeção entre nós dos grafos que leva arestas a arestas, e não-arestas a não-arestas

Isomorfismo de Grafos

Grafos são **isomorficos** se são “idênticos a não ser pelos nomes dos nós”

Mais formalmente, existe bijeção entre nós dos grafos que leva arestas a arestas, e não-arestas a não-arestas

Definição (Grafos Isomorfos)

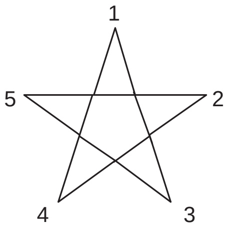
Dois grafos G e H são isomorfos se existe bijeção $f : V(G) \to V(H)$ entre os vértices de G e H tal que

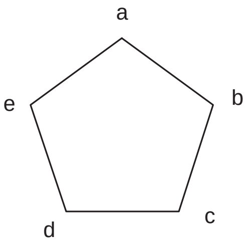
$$\text{é aresta em } G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \text{ é aresta em } H$$

Isomorfismo de Grafos

Exemplo

Encontre um isomorfismo entre os seguintes grafos:

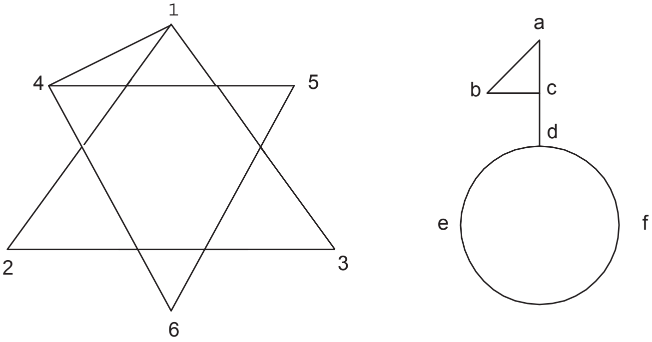




Isomorfismo de Grafos

Exemplo

Encontre um isomorfismo entre os seguintes grafos:



Isomorfismo de Grafos

Isomorfismo preserva "todas" as estruturas do grafo. Sejam G e H isomorficos, com isomorfismo $f : V(G) \to V(H)$. Então, por exemplo:

Isomorfismo de Grafos

Isomorfismo preserva "todas" as estruturas do grafo. Sejam G e H isomorficos, com isomorfismo $f : V(G) \to V(H)$. Então, por exemplo:

1) "Os graus de G" são iguais aos "graus de H"

Por exemplo, se G tem 5 nós, um com grau 4, dois com grau 3, e dois com grau 1, então H também tem um nó com grau 4, dois com grau 3 e dois com grau 1

Isomorfismo de Grafos

Isomorfismo preserva "todas" as estruturas do grafo. Sejam G e H isomorficos, com isomorfismo $f : V(G) \to V(H)$. Então, por exemplo:

1) "Os graus de G" são iguais aos "graus de H"

Por exemplo, se G tem 5 nós, um com grau 4, dois com grau 3, e dois com grau 1, então H também tem um nó com grau 4, dois com grau 3 e dois com grau 1

2) Se $P = u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_k$ é um caminho em G (vamos ver definição a seguir), então H tem o "mesmo" caminho $f(u_1) \to f(u_2) \to \ldots \to f(u_k)$

Isomorfismo de Grafos

Isomorfismo preserva "todas" as estruturas do grafo. Sejam G e H isomorficos, com isomorfismo $f : V(G) \to V(H)$. Então, por exemplo:

1) "Os graus de G" são iguais aos "graus de H"

Por exemplo, se G tem 5 nós, um com grau 4, dois com grau 3, e dois com grau 1, então H também tem um nó com grau 4, dois com grau 3 e dois com grau 1

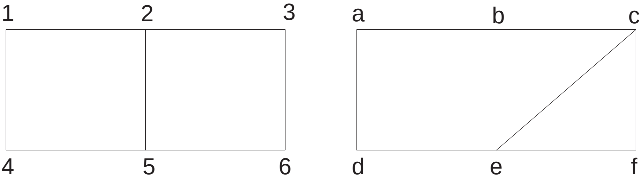
2) Se $P = u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_k$ é um caminho em G (vamos ver definição a seguir), então H tem o "mesmo" caminho $f(u_1) \to f(u_2) \to \ldots \to f(u_k)$

Observação: Note que se G e H são isomorficos como acima, então temos bijeção de nós de H para nós de G: basta usar a inversa f^{-1}

Isomorfismo de Grafos

Exemplo

Mostre que os grafos a seguir não são isomorfos.



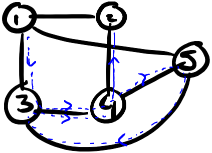
Caminhos, ciclos, e árvores

Caminhos

Definição (Passeio)

*Um **passeio** (walk) em um grafo G é uma sequência $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$, tal que as extremidades de e_i são v_{i-1} e v_i para todo $i = 1, \ldots, k$.*

*O inteiro k é o **comprimento** do passeio W.*



• Passeio

$W = 1 - 3 - 4 - 5 - 3 - 4 - 2$

pode ter repetições

• Outro passeio

$4 - 2 - 1 - 3 - 4$

Caminhos

Definição (Passeio)

*Um **passeio** (walk) em um grafo G é uma sequência $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$, tal que as extremidades de e_i são v_{i-1} e v_i para todo $i = 1, \ldots, k$.*

*O inteiro k é o **comprimento** do passeio W.*

Caminhos

Definição (Passeio)

*Um **passeio** (walk) em um grafo G é uma sequência $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$, tal que as extremidades de e_i são v_{i-1} e v_i para todo $i = 1, \dots, k$.*

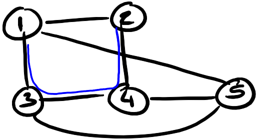
*O inteiro k é o **comprimento** do passeio W.*

Obs: Em um grafo simples não é necessário indicar as arestas de W, pois par de vértices identifica de forma única uma aresta

Caminhos

Definição (Caminho)

Um ***caminho*** *é um passeio onde* *todos os vértices são distintos*



1 - 2 - 3 - 4 é caminho

1 - 3 - 4 - 5 - 3 - 4 - 2

não é caminho

repetição

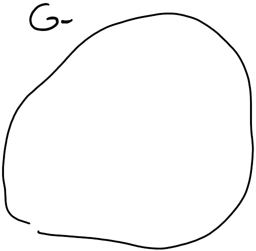
Proposição

Considere um grafo G, e nós distintos $u \neq v$. Se existe um passeio de u para v, então também existe um caminho de u pra v

Proposição

Considere um grafo G, e nós distintos $u \neq v$. Se existe um passeio de u para v, então também existe um caminho de u pra v

Ideia: Podemos começar com passeio (que tem repetição de nós) e "cortar caminho", removendo repetições



Proposição

Considere um grafo G, e nós distintos $u \neq v$. Se existe um passeio de u para v, então também existe um caminho de u pra v

Proposição

Considere um grafo G, e nós distintos $u \neq v$. Se existe um passeio de u para v, então também existe um caminho de u pra v

Prova: Seja $W = u = v_0 v_1 \ldots v_k = v$ o passeio de u a v com o menor número de repetição de nós

Proposição

Considere um grafo G, e nós distintos $u \neq v$. Se existe um passeio de u para v, então também existe um caminho de u pra v

Prova: Seja $W = u = v_0 v_1 \dots v_k = v$ o passeio de u a v com o menor número de repetição de nós

Suponha que W não é caminho. Vamos obter uma contradição

Proposição

Considere um grafo G, e nós distintos $u \neq v$. Se existe um passeio de u para v, então também existe um caminho de u pra v

Prova: Seja $W = u = v_0 v_1 \ldots v_k = v$ o passeio de u a v com o menor número de repetição de nós

Suponha que W não é caminho. Vamos obter uma contradição

Como W não é caminho, tem nó repetido: $v_i = v_j$ para algum $i < j$

Proposição

Considere um grafo G, e nós distintos $u \neq v$. Se existe um passeio de u para v, então também existe um caminho de u pra v

Prova: Seja $W = u = v_0 v_1 \dots v_k = v$ o passeio de u a v com o menor número de repetição de nós

Suponha que W não é caminho. Vamos obter uma contradição

Como W não é caminho, tem nó repetido: $v_i = v_j$ para algum $i < j$

(Cortar caminho) Mas olhe o passeio de u a v

$u = v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_i \to v_{j+1} \to \ldots \to v_k = v$

(Cortar caminho) Mas olhe o passeio de u a v

$u = v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_i \to v_{j+1} \to \ldots \to v_k = v$

Ele tem menos repetição que W, contradizendo que W tinha menor número de repetição

(Cortar caminho) Mas olhe o passeio de u a v

$u = v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_i \to v_{j+1} \to \ldots \to v_k = v$

Ele tem menos repetição que W, contradizendo que W tinha menor número de repetição

Isso conclui a prova

Proposição

Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho de tamanho k.

Proposição

Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho de tamanho k.

Prova: Seja $P = v_0 v_2 \ldots v_{p-1}$ o maior caminho em G, com p nós (pode ter $p = 1$)

Proposição

Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho de tamanho k.

Prova: Seja $P = v_0 v_2 \ldots v_{p-1}$ o maior caminho em G, com p nós (pode ter $p = 1$)

Suponha por contradição que P tem menos que k nós

Proposição

Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho de tamanho k.

Prova: Seja $P = v_0 v_2 \dots v_{p-1}$ o maior caminho em G, com p nós (pode ter $p = 1$)

Suponha por contradição que P tem menos que k nós

Como v_0 tem $\geq k$ vizinhos, tem vizinho u que não está em P

Proposição

Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho de tamanho k.

Prova: Seja $P = v_0 v_2 \dots v_{p-1}$ o maior caminho em G, com p nós (pode ter $p = 1$)

Suponha por contradição que P tem menos que k nós

Como v_0 tem $\geq k$ vizinhos, tem vizinho u que não está em P

Mas então temos caminho com $p + 1$ nós dado por $u \to v_0 \to \dots \to v_{p-1} \Rightarrow$ contradição que P é maior caminho

Proposição

Considere um grafo simples G. Suponha que o grau de todos os nós em G é pelo menos k. Então G possui um caminho de tamanho k.

Prova: Seja $P = v_0 v_2 \ldots v_{p-1}$ o maior caminho em G, com p nós (pode ter $p = 1$)

Suponha por contradição que P tem menos que k nós

Como v_0 tem $\geq k$ vizinhos, tem vizinho u que não está em P

Mas então temos caminho com $p + 1$ nós dado por $u \to v_0 \to \ldots \to v_{p-1} \Rightarrow$ contradição que P é maior caminho

Conectividade

Definição (Conectividade)

*Um grafo é **conexo/conectado** se pra todo par de nós u e v, existe um caminho no grafo entre u e v*

Conectividade

Definição (Conectividade)

*Um grafo é **conexo/conectado** se pra todo par de nós u e v, existe um caminho no grafo entre u e v*

Pergunta: Se G é conexo e adicionamos uma aresta, o que acontece? E se removemos uma aresta?

Componentes conexos

Os componentes conexos são os "blocos conexos" do grafo

Definição

Considere um grafo G. Um conjunto dos vertices S é um ***componente conexo*** *se:*

(i) O conjunto S é conexo, ou seja, pra todo par de nós S existe caminho em G entre eles
(ii) S não está contido em um conjunto conexo estritamente maior que ele

Componentes conexos

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?
Resp: G conexo $\Leftrightarrow$ tem 1 componente conexo

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?
Resp: G conexo $\Leftrightarrow$ tem 1 componente conexo

Pergunta: Considere um nó em um componente conexo de um grafo. Para onde estão indo suas arestas?

Componentes conexos

Pergunta: Se G é conexo, ele tem quantos componentes conexos?
Resp: G conexo $\Leftrightarrow$ tem 1 componente conexo

Pergunta: Considere um nó em um componente conexo de um grafo. Para onde estão indo suas arestas?

Resp: Para nós no mesmo componente conexo

Ciclos

Informalmente, um ciclo é um caminho que começa e termina no mesmo nó

Ciclos

Informalmente, um ciclo é um caminho que começa e termina no mesmo nó

Definição (Ciclo)

*Um **ciclo** é um passeio* $W = v_0 e_1 v_2 e_2 \ldots e_k v_k$ *onde:*

(i) Os nós iniciais e finais são os mesmos: $v_0 = v_k$

(ii) Todos os outros nós são distintos: $v_i \neq v_j$ *pra todo* $i < j$ *diferente de* $i = 0, j = k$

Proposição

Seja G um grafo simples onde todos os nós tem grau pelo menos 2. Então G tem um ciclo

Proposição

Seja G um grafo simples onde todos os nós tem grau pelo menos 2. Então G tem um ciclo

Prova: Considere o maior caminho $P = v_0 v_2 \ldots v_k$ no grafo

Proposição

Seja G um grafo simples onde todos os nós tem grau pelo menos 2. Então G tem um ciclo

Prova: Considere o maior caminho $P = v_0 v_2 \dots v_k$ no grafo

Como v_0 tem grau pelo menos 2, ele tem outro vizinho u além de v_1

Proposição

Seja G um grafo simples onde todos os nós tem grau pelo menos 2. Então G tem um ciclo

Prova: Considere o maior caminho $P = v_0 v_2 \ldots v_k$ no grafo

Como v_0 tem grau pelo menos 2, ele tem outro vizinho u além de v_1

Esse vizinho não pode estar fora do caminho P, senão $u \to v_0 \to \ldots \to v_k$ seria um caminho mais longo que P

Ciclo

Então u está no caminho P: $u = v_i$ para algum $v_i \in P$

Ciclo

Então u está no caminho P: $u = v_i$ para algum $v_i \in P$

Temos então o ciclo $u \to v_0 \to \ldots \to v_i \to u$

Exercicios

Exercício 1: O que acontece ao número de componentes conexos de G quando adicionamos uma aresta? E quando removemos uma aresta?

Exercício 2: Qual o maior (em número de arestas) caminho no grafo abaixo? E qual o maior ciclo?

Exercício 3: Considere um grafo G, e um nó u. Prove que se (u, v) é uma aresta no grafo, então v está no mesmo componente conexo de u

Exercícios

Exercício 4:* Considere um grafo **simples** com n nós. Prove que se todos os nós tem grau $\geq \frac{n}{2}$, então o grafo é conexo

Dica: Por contradição, assuma que não é conexo, e portanto tem mais de 1 componente conexo. Olhe para um nó no menor componente conexo; para onde estão indo suas $\geq \frac{n}{2}$ arestas?